(c) Holger Sandker, 26133 Oldenburg

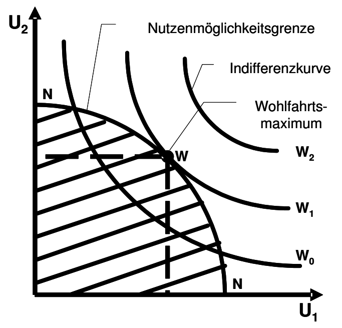
ALLOKATIONSTHEORIE

Holger@Sandker.de

1 Wohlfahrtsmaximum und Pareto-Optima

1.1 Nutzenmöglichkeitsgrenze, gesellschaftliche Indifferenzkurven und Wohlfahrtsmaximum

Die **Nutzenmöglichkeitsgrenze ("in the situation sense")** ist die grafische Darstellung aller möglichen pareto-optimalen Zustände.



Hinter der Nutzenmöglichkeitsgrenze verbergen sich die folgenden physischen und technischen Beschränkungen:

- Zur Produktion der Konsumgüter X und Y kann von den Produktionsfaktoren A und K nicht mehr eingesetzt werden, als an Anfangsbeständen vorhanden ist:

  $A \geq A_x + A_y$ und $K \geq K_x + K_y$ ⏩ **Vollbeschäftigung**, wenn $A = A_x + A_y$, $K = K_x + K_y$

- Der mit gegebenen Faktoreinsatzkombinationen jeweils maximal herstellbare Branchenoutput X bzw. Y ist nach oben begrenzt:

  $X \leq X(A_x, K_x)$ und $Y \leq Y(A_y, K_y)$ ⏩ **Keine Verschwendung**, wenn $X = X(A_x, K_x)$, $Y = Y(A_y, K_y)$

- Es können nicht mehr Güter auf die beiden Konsumenten verteilt werden, als vorher produziert worden sind:

  $X \geq x_1 + x_2$ und $Y \geq y_1 + y_2$ ⏩ **Vollständige Verteilung**, wenn $X = x_1 + x_2$, $Y = y_1 + y_2$

⏩ Eine (unter anderen!) notwendige Bedingung, dafür, dass die Nutzenmöglichkeitsgrenze erreicht wird, beinhaltet mithin, dass in allen o.a. Beschränkungen das Gleichheitszeichen gilt.

1.2 Notwendigen Bedingungen für ein Pareto-Optimum:

Pareto-Optimum: Ein Zustand stellt ein Pareto-Optimum dar, wenn es realisierbar ist, und wenn es weder durch eine Reallokation der Faktoren noch durch eine Änderung der Güterverteilung möglich ist, den Nutzen mindestens eines Konsumenten zu steigern, ohne gleichzeitig denjenigen eines anderen zu senken.

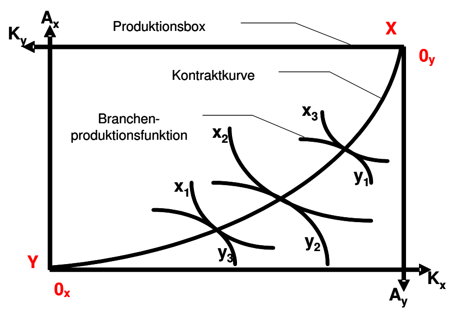
- **Effiziente Güterverteilung (Konsum- oder Tauschoptimum)**

  Die produzierten Güter X und Y sind so auf die beiden Konsumenten zu verteilen, dass die **Grenzraten der Gütersubstitution** übereinstimmen: $\boxed{-\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{dy_2}{dx_2}}$

- **Effiziente Faktorverwendung (Produktionsoptimum)**

  Die Produktionsfaktoren A und K sind so auf die beiden Branchen aufzuteilen, dass die **Grenzraten der Faktorsubstitution** in beiden Verwendungen gleich sind:

  $$\boxed{-\frac{dA_x}{dK_x} = -\frac{dA_y}{dK_y}}$$

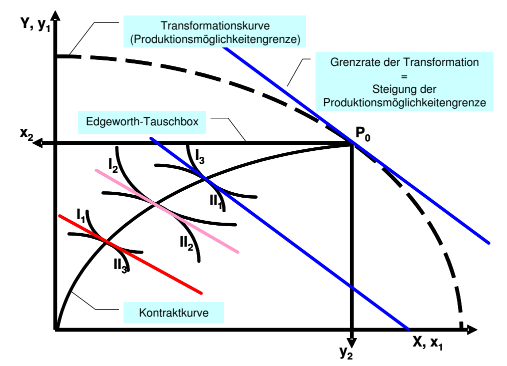


  Die Kontraktkurve ist der geometrische Ort aller effizienten Faktoraufteilungen.

  Die rot dargestellten Achsenbezeichnungen zeigen die Herleitung der Transformationskurve (sh. unten), die die äußere Grenze der Produktionsmöglichkeiten der Volkswirtschaft angibt.

- **Globale Effizienz (Pareto-Optimalität)**

  Produktion und Konsum sind so aufeinander abzustimmen, dass die **Grenzrate der Transformation** – wie sie entlang der Transformationsfunktion gemessen wird – den **Grenzraten der Gütersubstitution** bei den Konsumenten entspricht:



$$\boxed{-\frac{dy_i}{dx_i} = -\frac{dY}{dX}}$$

mit i = 1, 2

Die abgeleiteten Bedingungen sind Marginalbedingungen (innere Lösungen). Diese sind um Totalbedingungen zu ergänzen, die ggf. vorliegende Randlösungen bei den Fragen bestimmen, ob

(a) ein noch nicht produziertes Gut hergestellt werden sollte,

⏩ Die Produktion eines noch nicht produzierten Gutes sollte nur dann aufgenommen werden, wenn für die erste zu produzierende Einheit die Grenzrate der Gütersubstitution größer ist als die Grenzrate der Transformation.

(b) in einer Branche ein dort noch nicht genutzter Faktor eingesetzt werden sollte.

⏩ In einer Branche, in der ein Faktor noch nicht eingesetzt ist, sollte dieser Faktor nur dann eingesetzt werden, wenn durch die erste von ihm eingesetzte Einheit dort bei unverändertem Branchenoutput mehr von dem anderen Faktor freigesetzt wird, als benötigt wird, um in der anderen Branche den durch den Abzug dieser Einheit verursachten Produktionsrückgang zu kompensieren.

1.3 Algebraische Herleitung der notwendigen Marginalbedingungen für ein Pareto-Optimum (Referenzmodell)

(A1)	Max.:	$U_1 = U_1(x_1, y_1)$	Nutzen Konsument 1
(A2)	u.d.N.:	$U_2(x_2, y_2) - \bar{U}_2 = 0$	Nutzen Konsument 2
(A3)		$X - x_1 - x_2 = 0$	Vollst. Verteilung Gut X
(A4)		$Y - y_1 - y_2 = 0$	Vollst. Verteilung Gut Y
(A5)		$\bar{A} - A_x - A_y = 0$	Vollbeschäftigung Faktor A
(A6)		$\bar{K} - K_x - K_y = 0$	Vollbeschäftigung Faktor K
(A7)		$X(A_x, K_x) - X = 0$	Keine Verschw. Branche X
(A8)		$Y(A_y, K_y) - Y = 0$	Keine Verschw. Branche Y

Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L = {} & U_1(x_1,y_1) + \lambda[U_2(x_2,y_2) - \bar{U}_2] \\ & + \Theta_x(X - x_1 - x_2) + \Theta_y(Y - y_1 - y_2) \\ & + \Theta_a(\bar{A} - A_x - A_y) + \Theta_k(\bar{K} - K_x - K_y) \\ & + \delta_x[X(A_x,K_x) - X] + \delta_y[Y(A_y,K_y) - Y] \end{aligned}$$

Erste Ableitungen von L nach allen unabhängigen Variablen:

(B1) $\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \Theta_x = 0$ (B2) $\frac{\partial L}{\partial y_1} = \frac{\partial U_1}{\partial y_1} - \Theta_y = 0$

(B3) $\frac{\partial L}{\partial x_2} = \lambda\frac{\partial U_2}{\partial x_2} - \Theta_x = 0$ (B4) $\frac{\partial L}{\partial y_2} = \lambda\frac{\partial U_2}{\partial y_2} - \Theta_y = 0$

(B5) $\frac{\partial L}{\partial A_x} = -\Theta_a + \delta_x\frac{\partial X}{\partial A_x} = 0$ (B6) $\frac{\partial L}{\partial A_y} = -\Theta_a + \delta_y\frac{\partial Y}{\partial A_y} = 0$

(B7) $\frac{\partial L}{\partial K_x} = -\Theta_k + \delta_x\frac{\partial X}{\partial K_x} = 0$ (B8) $\frac{\partial L}{\partial K_y} = -\Theta_k + \delta_y\frac{\partial X}{\partial K_y} = 0$

(B9) $\frac{\partial L}{\partial X} = \Theta_x - \delta_x = 0$ (B10) $\frac{\partial L}{\partial Y} = \Theta_y - \delta_y = 0$

Aus (B1-B4) folgt $\frac{\frac{\partial U_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial U_1}{\partial y_1}} = \frac{\frac{\partial U_2}{\partial x_2}}{\frac{\partial U_2}{\partial y_2}}$.

Totales Differenzieren von (A1) mit dU=0 ergibt:
Nebensatz (A): *Die Grenzrate der Gütersubstitution ist gleich dem negativen umgekehrten Verhältnis der Grenznutzen:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}$$

Daraus folgt die Bedingung für die **effiziente Güterverteilung**:

(I) $\boxed{-\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{dy_2}{dx_2}} = \left[\frac{\Theta_x}{\Theta_y}\right]$

Aus (B5-B8) folgt $\frac{\frac{\partial X}{\partial K_x}}{\frac{\partial X}{\partial A_x}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial K_y}}{\frac{\partial Y}{\partial A_y}}$

Totales Differenzieren von (A7) mit dX=0 ergibt:
Nebensatz (B): *Die Grenzrate der Faktorsubstitution ist gleich dem negativen umgekehrten Verhältnis der Grenzproduktivitäten:*

$$\frac{dA}{dK} = -\frac{\frac{\partial X}{\partial K}}{\frac{\partial X}{\partial A}}$$

Daraus folgt die Bedingung für die **effiziente Faktorverwendung**:

(II) $\boxed{-\frac{dA_x}{dK_x} = -\frac{dA_y}{dK_y}} = \left[\frac{\Theta_a}{\Theta_k}\right]$

Aus (B9) und (B10) folgt: $\frac{\Theta_x}{\Theta_y} = \frac{\partial_x}{\partial_y}$, aus (B5) bis (B8) unter Beachtung von (I) folgt:

$$\frac{\partial_x}{\partial_y} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial A_y}}{\frac{\partial X}{\partial A_x}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial K_y}}{\frac{\partial X}{\partial K_x}} = \left[\frac{\Theta_x}{\Theta_y} = \frac{\partial_x}{\partial_y}\right] = -\frac{dy_i}{dx_i} \quad \text{mit } i = 1, 2$$

Nach totaler Differenzierung der Nebenbedingungen zur Vollbeschäftigung und Nicht-Verschwendung

$dA_y = -dA_x$, $dK_y = -dK_x$

$dX = \frac{\partial X}{\partial A_x}dA_x + \frac{\partial X}{\partial K_x}dK_x$, $dY = \frac{\partial Y}{\partial A_y}dA_y + \frac{\partial Y}{\partial K_y}dK_y$

erhält man:

$$-\frac{dY}{dX} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial A_y}}{\frac{\partial X}{\partial A_x}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial K_y}}{\frac{\partial X}{\partial K_x}}$$

Nebensatz (C): Die negative Grenzrate der Transformation ist gleich dem Verhältnis der Grenzproduktivitäten eines Faktors.

Hieraus folgt die notwendige Bedingung für **Globale Effizienz**:

(III) $\boxed{-\frac{dy_i}{dx_i} = -\frac{dY}{dX}}$ mit i = 1, 2

1.4 Langfristige Konkurrenzgleichgewichte (Referenzmodell)

Erster Hauptsatz der Wohlfahrtsökonomik: „Jedes langfristige Konkurrenzgleichgewicht ist ein Pareto-Optimum.“

Eigenschaften des langfristigen Konkurrenzgleichgewichts:

- Vollständiger Wettbewerb (vollkommene Märkte, homogene Güter, Nachfrager und Anbieter sind auf allen Märkten Mengenanpasser
- Kein Wachstum (gegebene Faktormengen, kein technischer Fortschritt)
- Vollbeschäftigung und vollkommene Mobilität der Produktionsfaktoren
- Keine Kollektivgüter
- Keine externen Effekte im Konsum und in der Produktion
- Rationales Verhalten der Wirtschaftssubjekte

(I) Effiziente Güterverteilung:

Die Konsumenten maximieren ihren Nutzen:

$U_i = U_i(x_i, y_i)$ i = 1,...,n

bei Beachtung des fixen Einkommens als Nebenbedingung:

$\bar{E}_i = \bar{p}_x x_i + \bar{p}_y y_i$ i = 1,...,n

Die zugehörige Lagrange-Funktion lautet:

$L = U_i(x_i, y_i) + \lambda_i[\bar{E}_i - \bar{p}_x x_i - \bar{p}_y y_i]$ i = 1,...,n

L nach x_i und y_i ableiten und gleich Null setzen:

$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \lambda_i \bar{p}_x$, $\frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{\partial U}{\partial y_i} - \lambda_i \bar{p}_y$ i = 1,...,n

Auflösen nach p und wegen Nebensatz (A) ergibt sich:

(I') $\left(\frac{\bar{p}_x}{\bar{p}_y} = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}}{\frac{\partial U_i}{\partial y_i}} = \right) - \frac{dy_i}{dx_i}$

i = 1, ..., n

Nebensatz (D): Grenznutzenverhältnis ist gleich Güterpreisverhältnis:

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}$$

Damit ist die Bedingung für die effiziente Güterverteilung abgeleitet.

⏩ Alle Konsumenten werden ihre Einkommen in der Weise zum Kauf der Güter X und Y verwenden, dass ihre Grenzraten der Gütersubstitution jeweils gleich dem umgekehrten Güterpreisverhältnis sind.

(II) Effiziente Faktorverwendung:

Die Unternehmen streben danach, ihre Gewinne zu maximieren:

$\text{Max}: \; G_x^j = \bar{p}_x \cdot X^j(A_x^j, K_x^j) - \bar{p}_a A_x^j - \bar{p}_k K_x^j$ j = 1,...,h*

$\text{Max}: \; G_y^r = \bar{p}_y \cdot Y^r(A_y^r, K_y^r) - \bar{p}_a A_y^r - \bar{p}_k K_y^r$ r = 1,...,k*

wobei h* und k* hier und im weiteren die optimalen Unternehmenszahlen in den Branchen X und Y sind.

Die ersten Ableitungen nach 0 setzen, um die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für die Gewinnmaxima zu erhalten:

$\frac{\partial G_x^j}{\partial A_x^j} = \bar{p}_x \frac{\partial X^j}{\partial A_x^j} - \bar{p}_a = 0$ $\frac{\partial G_x^j}{\partial K_x^j} = \bar{p}_x \frac{\partial X^j}{\partial K_x^j} - \bar{p}_k = 0$ j = 1,...,h*

$\frac{\partial G_y^r}{\partial A_y^r} = \bar{p}_y \frac{\partial Y^r}{\partial A_y^r} - \bar{p}_a = 0$ $\frac{\partial G_y^r}{\partial K_y^r} = \bar{p}_y \frac{\partial Y^r}{\partial K_y^r} - \bar{p}_k = 0$ r = 1,...,k*

Nach Division und unter Berücksichtigung von Nebensatz (B) erhält man die Bedingung für effiziente Faktorverwendung:

(II') $\left(\frac{\bar{p}_k}{\bar{p}_a} = \frac{\frac{\partial X^j}{\partial K_x^j}}{\frac{\partial X^j}{\partial A_x^j}} = \frac{\frac{\partial Y^r}{\partial K_y^r}}{\frac{\partial Y^r}{\partial A_y^r}} = \right) - \frac{dA_x^j}{dK_x^j} = -\frac{dA_y^r}{dK_y^r}$

⏩ Alle Unternehmen werden die Faktoren in der Weise einsetzen, dass ihre Grenzraten der Faktorsubstitution gleich dem umgekehrten Faktorpreisverhältnis entsprechen.

Nebensatz (E): Das Grenzproduktivitätenverhältnis ist gleich dem Faktorpreisverhältnis:

$$\frac{p_k}{p_a} = \frac{\frac{\partial X}{\partial K_x}}{\frac{\partial X}{\partial A_x}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial K_y}}{\frac{\partial Y}{\partial A_y}}$$

(III) Globale Effizienz:

Die BEO bei der Berechnung der effizienten Faktorverwendung können umgestellt werden zu $\frac{\bar{p}_x}{\bar{p}_y} = \frac{\frac{\partial Y^r}{\partial A_y^r}}{\frac{\partial X^j}{\partial A_x^j}} = \frac{\frac{\partial Y^r}{\partial K_y^r}}{\frac{\partial X^j}{\partial K_x^j}}$. Unter Berücksichtigung der Herleitung der Nebensätze (C) und (D) erhält man die Bedingung für globale Effizienz:

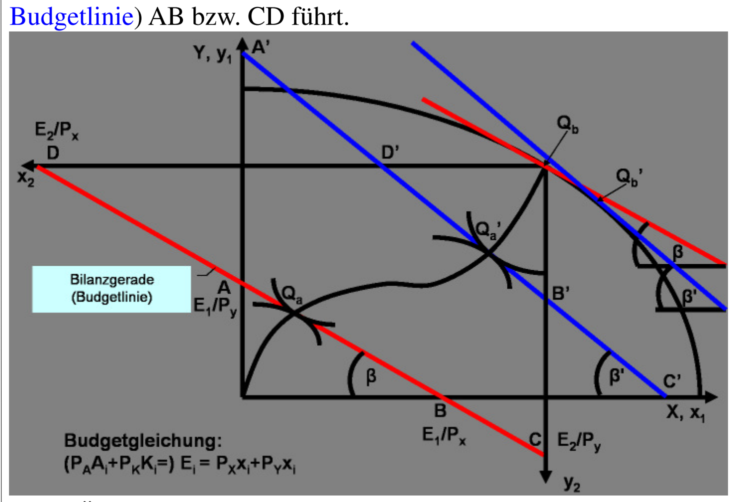
(III') $-\frac{dy^i}{dx^i} = \frac{\bar{p}_x}{\bar{p}_y} = -\frac{dY}{dX}$ i = 1,...,n

⏩ Der Allokationsmechanismus „Markt“ löst damit das Informationsproblem, das Koordinationsproblem und das Motivationsproblem.

1.5 Die Notwendigkeit der Einkommensumverteilung

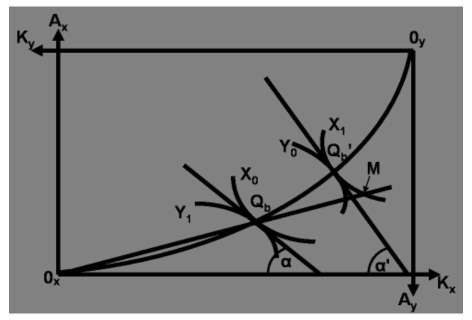
Durch eine Umverteilung der Eigentumsrechte lassen sich unterschiedliche Punkte auf der Nutzenmöglichkeitsgrenze realisieren. Beispiel:

Ausgangssituation: Das Gleichgewicht wird beschrieben durch die Punkte Q_a und Q_b, das Güterpreisverhältnis ist tg . Bei der anfangs herrschenden Verteilung der Eigentumsrechte verfügen I bzw. II über ein Einkommen, das zu der Bilanzgeraden (auch: Budgetlinie) AB bzw. CD führt.



Nach Übertragung der Eigentumsrechte am Faktor Kapital von II auf I: Das Einkommen des I steigt zu Lasten des II, die Bilanzgerade verschiebt sich dadurch nach rechts (A'B' bzw. C'D'). Annahme (aus Aufgabenstellung): Die Steigung tg ' ist größer als in der Ausgangssituation, d.h. der relative Preis des Gutes X ist gestiegen. Durch den höheren Preis steigt der Anreiz zur Produktion von Gut X, so dass der neu Produktionspunkt Q_b' rechts vom ursprünglichen Punkt Q_b liegt.

Die Bewegung des Produktionspunktes auf der Transformationskurve von Q_b nach Q_b' ist in der nächsten Abbildung auf der Kontraktkurve der Produktionsbox eingezeichnet. Mit der Änderung in der Produktionsstruktur geht eine Änderung des Faktorpreisverhältnisses einher. Im vorliegenden Fall steigt das Verhältnis p_k/p_a (tg ' > tg). Diese Änderung hat ebenfalls Auswirkungen auf die Einkommensverteilung, was zu einer erneuten Verschiebung der Bilanzgeraden führt. Diese Bewegung kann sowohl der ursprünglichen Verschiebung entgegenlaufen, als sie auch verstärken.



Damit ist der Beginn eines komplexen, durch die Änderung der Eigentumsverhältnisse hervorgerufenen Anpassungsprozesses beschrieben.

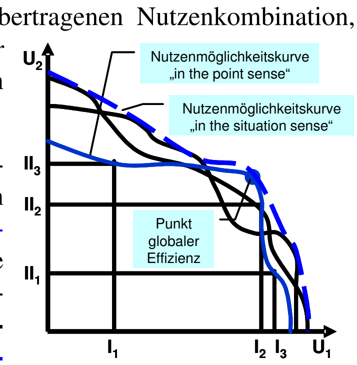
Zweiter Hauptsatz der Wohlfahrtsökonomik: „Jedes Pareto-Optimum lässt sich bei einer entsprechenden Verteilung der Eigentumsrechte an den Produktionsfaktoren durch ein langfristiges Konkurrenzgleichgewicht realisieren.“

1.6 Weitere Begriffe bzgl. Wohlfahrtsmax. und Pareto-Optima

Pareto-superiorer Zustand: Ein Zustand B heißt Pareto-superior gegenüber einen Zustand A genau dann, wenn im Zustand B der Nutzen keines Individuums geringer ist als im Zustand A und wenn der Nutzen wenigstens eines Individuums größer ist.

Nach dem Pareto-Kriterium nicht vergleichbar sind zwei Zustände, wenn in einem Zustand wenigstens ein Individuum besser und wenigstens ein Individuum schlechter gestellt sind als im anderen Zustand.

Als **Nutzenmöglichkeitskurve „in the point sense“** bezeichnet man eine in den Nutzenraum übertragenen Nutzenkombination, die auf der Kontraktkurve *einer einzigen*, z.B. für P_0, effizienten X-Y-Güterverteilung liegt.



Leitet man weitere Nutzenmöglichkeitskurven ab, die zu anderen Punkten auf der Transformationsfunktion gehören, so verbindet die umhüllende Nutzenmöglichkeitskurve **alle Punkte globaler Effizienz**. Dies ist die **Nutzenmöglichkeitskurve „in the situation sense“**. Sie ist die Nutzenmöglichkeitsgrenze der Modellwirtschaft.

KALDOR-HICKS-Kriterium (als Alternative zum Pareto-Kriterium): Danach sollte eine Maßnahme dann durchgeführt werden, wenn der Gewinner den Verlierer entschädigen könnte(!) und trotzdem noch besser gestellt wäre, als ohne diese Maßnahme (die Maßnahme muss aber nicht durchgeführt werden!). Allerdings: Die Beurteilung einer Situation nach dem Kaldor-Hicks-Kriterium kann nach **SCITOVSKY** zu Widersprüchen führen (aufgrund sich schneidender Nutzenmöglichkeitskurven „in the point sense“).

Wohlfahrtsfunktion vom BERGSON-SAMUELSON-Typ:

$\frac{\partial W}{\partial U_i} > 0$, i = 1, 2 Wenn der Nutzen des Konsumenten i steigt, so steigt ceteris paribus auch die soziale Wohlfahrt.

RAWLsche Wohlfahrtsfunktion: $W = \min\{U_i\} \rightarrow \max!$

⏩ Der Nutzen des jeweils (zukünftig!) am schlechtesten Gestellten soll maximiert werden (extreme Risikoaversion der Konsumenten)

Utilitaristische Wohlfahrtsfunktion: $W = \sum_{i=1}^{n} U_i \rightarrow \max!$

⏩ Die gesellschaftliche Wohlfahrt ergibt sich durch einfache Addition der individuellen Nutzen. Sie ist maximal, wenn die Summe der Einzelnutzen maximal ist.

Berechnung der Grenzrate der Transformation $-\frac{dY}{dX^*}$ nach dem Enveloppen-Theorem:

Die Lagrange-Funktion bei Maximierung des Gutes Y hat folgendes Aussehen:

$$L = Y(A_y, K_y) + \lambda[X(A_x, K_x) - X^*] + \mu_a(\bar{A} - A_x - A_y) + \mu_k(\bar{K} - K_x - K_y)$$

Nach dem Enveloppen-Theorem gilt $\frac{dY}{dX^*} = \frac{\partial L}{\partial X^*} = -\lambda$. λ errechnet sich aus den ersten Ableitungen nach L. (Bei Maximierung von X und Anpassung der Lagrange-Funktion kann entsprechend geschrieben werden: $\frac{dX}{dY^*} = \frac{\partial L}{\partial Y^*} = -\lambda$.)

Wohlfahrtsmaximum: Optimum einer sozialen Wohlfahrtsfunktion SWF(U_1,U_2) unter den Ausstattungsrestriktionen $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$. Ein Wohlfahrtsmaximum lässt sich darstellen als Tangentialpunkt zwischen der Nutzenmöglichkeitsgrenze und der höchsten erreichbaren Indifferenzkurve der SWF.