# Schriftliche Hausarbeit zur Prüfung für das Lehramt an Grund- und Hauptschulen

---

Thema der Arbeit:

**Aktiv-entdeckendes Lernen beim Papierfalten im Geometrieunterricht der Grundschule**

Beurteilender Hochschullehrer:

**Rolf Heidenreich**

Oldenburg, 1. November 1998


Name des Kandidaten:

**Sascha von Engelmann**

# VORBEMERKUNG

Ich möchte mir hier zu Anfang erlauben, den Versuch zu unternehmen, einen groben Einblick in die Motive zu geben, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit vom Anfang bis zum Ende begleitet haben.

Angeregt durch meine eigenen positiven Erfahrungen als Schüler mit Geometrieunterricht und als Student mit einigen Unterrichtsversuchen während meines Fachpraktikums ist es für mich fast wie selbstverständlich, mich bei meiner ‘Examensarbeit’ mit dem Themenkreis der Geometrie zu beschäftigen. Dabei ist mir deutlich geworden, was eigentlich wirklich unter dem Begriff der Geometrie behandelt wird: Nicht bloß das Messen, Berechnen, Konstruieren, Zerlegen usw. steht für sich selbst über allen anderen Fragen der Geometrie, sondern das **Erschließen der Umwelt**; wozu die eben genannten Vorgehensweisen als Hilfsmittel betrachtet werden können. Mit dem Erschließen der Umwelt ist auch das Sich-einverleiben dieser gemeint. Das Vorgehen dabei ermöglicht, sich eine Denkweise anzueignen, die ihren Ursprung in der uns gegebenen Natur hat. Das übergeordnete Ziel könnte heißen, daß man sich zurechtfinden soll. Dazu muß man erfahren, wer man ist, wo man ist bzw. was uns umgibt. Daß der Mensch ist, weil er denkt, wissen wir spätestens seit RENÉ DESCARTES (1596-1650). Durch Siegfried J. SCHMIDT[1] erfahren wir über Ernst VON GLASERFELD, ein Vertreter des radikalen, daß dieser noch einen Schritt weiter geht: Nämlich daß die Ursache unseres Seins in der *Wahrnehmung* unseres Denkens liegt. Bekannt ist außerdem, daß jeder Mensch anders sei - besser: Jeder nimmt sich selber individuell wahr (bzw. wird jeweils individuell von den Mitmenschen wahrgenommen). Die Wahrnehmung steuert also nach deren Auffassung das Denken. Also ist ‘das Sein des Menschen’ jeweils individuell, weil das Denken jeweils individuelle Erfahrungen (Wahrnehmungen) mit der Umwelt verarbeitet. Verantwortlich sind dafür zum einen die kulturellen Unterschiede, und zum anderen sind es die innerhalb einer Kultur sich individuell ergebenen Auseinandersetzungen eines jeden Menschen mit der ihm sich jeweils bietenden Umwelt. Doch wenn man, wie u. a. Humberto R. MATURANA u. Francisco J. VARELA[2], davon ausgeht, daß wir als menschliche

[1] In VON GLASERFELD, 1998, S. 14

[2] 1987, S. 265

Wesen nur die Welt haben, die wir in Koexistenz mit anderen hervorbringen, stellt sich zwangsläufig die Frage, was die ‘Dinge’ sind, auf die sich die Menschen einigen bzw. geeinigt haben, daß man sie nicht mehr hinterfragen oder beweisen muß bzw. kann (Welchen Elementen der Umwelt gibt jeder Mensch immer wieder dieselben Bedeutungen?). Existieren sogar etwa identische kognitive Schemata?
Um also die Wirklichkeit (die gesamte wirkliche Welt) zu erfahren, gilt es zwar auch zu klären, was die Entstehung eines kognitiven Schemas auslöst, aber ebenso, welches denn nun die Erfahrungen der Menschen durch die Auseinandersetzung mit der Umwelt sind, die ihnen allen die gleichen Erkenntnisse einbringen. Anders ausgedrückt: Welche Entdeckungen in der Umwelt sind für jeden Menschen, sofern er seine Aufmerksamkeit entsprechend lenkt, immer regelmäßig dieselben? - Wir nennen sie die Gesetzmäßigkeiten! Sie sind unbestreitbare Tatsachen, weil sie nun einmal aus fundamentalen Ideen abgeleitet werden können! Sie bilden die Basis der Wirklichkeit. Sind solche Gesetzmäßigkeiten, die sich in den Postulaten und Axiomen der Geometrie und Mathematik widerspiegeln, auch durch das Falten von Papier zu entdecken?

Im Rahmen dieser schriftlichen Hausarbeit für das 1. Staatsexamen des Lehramts an Grund- u. Hauptschulen versuche ich, in der vorliegenden Arbeit darzulegen, ob der Schüler[1] gewisse äußere und innere Handlungsschemata erlernen kann, um letztendlich in einer selbständigen Auseinandersetzung mit der Umwelt sich diese auch zu erschließen - oder zumindest einen Teil davon. Im weiteren soll der Annahme nachgegangen werden, daß sich diesem Ziel auch durch das Sammeln von Erfahrungen mit dem Falten von Papier angenähert werden kann. Hierzu ist es notwendig zu prüfen, ob und inwieweit geometrische Entdeckungen beim Papierfalten möglich sind.

Diese Arbeit soll nicht nur eine Antwort auf die Frage geben, ob das Falten von Papier den Grundschüler im Geometrieunterricht insofern positiv beeinflussen kann, so daß er dabei geometrische Einsichten gewinnt und diese dadurch kognitiv erfaßt, sondern auch,

---

[1] Ausschließlich der Flüssigkeit bezüglich des Lesens verwende ich in meiner Arbeit die männlichen Pronomina - sie beziehen die weiblichen mit ein.

ob er eine gewisse Arbeitshaltung sich zu eigen machen kann, die ihm zur allgemeinen Selbständigkeit und Mündigkeit verhilft.

**INHALTSVERZEICHNIS** **SEITE**

# 1 EINLEITUNG

Das schriftlich formulierte Thema dieser Arbeit enthält vier Begriffe:

1. Aktiv-entdeckendes Lernen
2. Papierfalten
3. Geometrieunterricht
4. Grundschule

Ihnen gilt es während dieser Arbeit näher auf den Grund zu gehen, um dann in einem anschließenden Kapitel, das Anregungen für einen Unterricht geben soll, die jeweiligen Konsequenzen dieser vier Bereiche wieder miteinander zu verknüpfen.

Als Vorgehensweise habe ich Fragen erstellt, die mein Arbeiten an dieser Hausarbeit ständig begleitet haben und somit als eine Art ‘roter Faden’ dienten:

1. Zu welchen geometrischen Einsichten können Grundschüler beim Papierfalten gelangen?
2. Inwieweit ist es von Vorteil, daß sich Grundschüler beim Papierfalten nach der Entdeckungsmethode ‘durcharbeiten’?

<u>Zur logischen Gliederung dieser Arbeit</u>

Um diese Fragen angemessen beantworten zu können, muß zunächst auf Aspekte eingegangen werden, die sich in den Punkten 2 bis 6 meiner Gliederung wiederfinden. Die Behandlung der o. g. Bereiche ist dort mit eingeschlossen.

Zunächst sehe ich es zum einen zunächst als erforderlich an, die Sache - den Themenkreis der Geometrie - in einem groben,. allgemeinen Überblick darzustellen, um dann auch gleich darüber hinaus aufzuzeigen, welche Aufgabe der Grundschule zu Gute kommt, hier entsprechende Elemente der Geometrie behandeln zu können bzw. welche sie nach den Niedersächsischen Rahmenrichtlinien behandeln soll.

Zum anderen ist m. E. die menschliche Dimension - hier: der Lerner - nicht zu vernachlässigen. Diesbezüglich werde ich in meiner Arbeit auf relevante, grundlegende psychologische Aspekte eingehen, um die Voraussetzung des Lerners im Grundschulalter aufzuzeigen, die bei den Lernprozessen zu berücksichtigen sind. Darüber ist es notwendig auf bestehende pädagogische Konzepte einzugehen, die als Basis für entdeckendes Lernen gelten.

Das sechste Kapitel ist dem Papierfalten gewidmet. Dort soll in einer Art Sachanalyse dieser Bereich zerlegt werden, um eventuell brauchbare Ansätze für einen Unterricht zu entdecken, die dann für das darauffolgende Kapitel der Faltgeometrie genutzt werden sollen.

Zur Literaturauswahl

Die mir für diese Arbeit zur Verfügung stehende Literatur habe ich dahingehend überprüft, inwieweit Erfahrungen mit Papierfalten im Geometrieunterricht aus der Praxis des Unterrichtens bestehen. Dabei existiert offensichtlich nur sehr wenig grundschulbezogene Literatur, die den direkten Zusammenhang von Papierfalten und konkreten geometrischen Einsichten behandelt. Der Großteil der Literatur befindet sich außerhalb des deutschsprachigen Raums. Diese Dokumente sind zumeist nur über Mitgliedschaften in Origami-Vereinen und vor allem nur mittels Vorkasse zu bekommen. Ein anderes Problem stellt die für mich schwer verständliche Sprache da, die nur selten englisch ist.

*„Den Tod der Geometrie wird es nicht geben,*
*kann es gar nicht geben.*
*Geometrie ist überall.*
*Geometrie lebt.“*
(Herbert ZEITLER)[1]

# 2 THEMENKREIS: GEOMETRIE

In diesem Kapitel soll der Begriff Geometrie näher erläutert werden. Die geschichtliche Entwicklung der Geometrie und einen Überblick, der heutigen Bereiche, die die Geometrie behandelt, ist dazu nowendig.

## 2.1 Begriffsbestimmung

**Geometrie** bedeutet aus dem Griechischem übersetzt „*Landmessung*[2]“ bzw. „*Feldmesskunst*[3]“und läßt somit erkennen, daß es ein Begriff ist, der eher aus praktischem Begehren entstanden ist. Heute steht der Begriff Geometrie für eine Theorie, die eine Teildisziplin der Mathematik darstellt und sich mit den Eigenschaften und Formen des Raumes, wie der Gestalt ebener und räumlicher Figuren, Berechnung von Längen, Flächen, Inhalten u. a. beschäftigt.
Das umfangreiche Gebiet der Geometrie wird im allgemeinen nach einer Vielzahl von Gesichtspunkten eingeteilt und gegliedert.[4] Eine mögliche Einteilung der Geometrie ergibt sich z. B. aus der Betrachtung der jeweiligen Anzahl der Dimensionen.
Die **Euklidische Geometrie** (auch **Klassische Geometrie** genannt) beschäftigt sich mit den Eigenschaften der Figuren, die sich bei Bewegungen nicht verändern. Neben der

[1] 1981, S. 9
[2] Der Brockhaus Bd. 2, 1993, S. 332
[3] Meyers Neues Lexikon Bd. 4, S. 26
[4] Vgl. Der Brockhaus Bd. 2, 1993, S. 332

Betrachtung ein- und zweidimensionaler Figuren beschreibt sie auch die Gesetzmäßigkeiten des dreidimensionalen Raumes. Sie basiert auf dem Parallelenaxiom von EUKLID, das besagt, daß durch einen außerhalb einer Geraden liegenden Punkt nur eine einzige Parallele zu dieser Geraden gezogen werden kann.

Die **Nichteuklidische Geometrie** verzichtet auf die o. g. Einschränkung. Sie besagt nämlich entweder, daß durch einen Punkt mindestens zwei verschieden verlaufende Geraden zu einer dritten Gerade gleichzeitig parallel sind (**Hyperbolische Geometrie**), oder daß zwei Geraden einer Ebene immer einen gemeinsamen Punkt haben, wie z. B. auf der Oberfläche einer Kugel, und somit eben niemals zueinander parallel sein können (**Elliptische Geometrie**).

Die **Riemannsche Geometrie** beschreibt letztendlich das System im n-dimensionalen Raum, in dem die Nichteuklidische Geometrie bloß noch als Sonderfall enthalten ist. Sie beantwortet Fragen bezüglich der Gestaltverhältnisse des Raumes, die von Ort zu Ort verändert sein können. Die Riemannsche Geometrie ist die wichtigste Grundlage der Relativitätstheorie, die die Verteilung der Materie im Raum und die Krümmung des Raumes berücksichtigt.

Eine weitere Möglichkeit der Einteilung ergibt sich aus der Wahl anderer Aspekten: So kann man die Geometrie zum einen in den Bereich der **höheren Geometrie** einteilen, der neben der **Synthetischen Geometrie**, die auf Axiomensysteme aufgebaut ist und die die Figuren als Ganzes betrachtet, auch die **Analytische Geometrie** untergeordnet ist. Bei letzterer werden die einzelnen Punkte der Ebene und des Raumes betrachtet, die durch Koordinaten festgelegt und dadurch in geometrische Fragen der Algebra und der Analysis (**Differentialgeometrie** und **Integralgeometrie**) umgewandelt werden können. Und zum anderen ist es der Bereich der **Elementargeometrie**, dieser teilt sich ebenfalls nochmals wieder in die ebene Geometrie (**Planimetrie**) und die räumliche Geometrie (**Stereometrie**) auf. Ihr untergeordnet ist u. a. die **Trigonometrie**, die sich auf Berechnungen von Längen und Winkeln bezieht.

Eine weitere Unterteilung der Elementargeometrie in einzelne geometrische Bereiche ist nach Heinz SCHWARTZE[1] in der von Felix KLEIN entwickelten Gruppentheorie verborgen. Bei seinem *geometrischen Einteilungsprinzip* spielen gewissen *Abbildungen* des Raumes (Transformationen) eine zentrale Rolle. Jede der einzelnen Abbildungsgruppen ist charakterisiert durch bestimmte Invarianten bei den Abbildungen geometrischer Gebilde.

Hierzu zählt in (hierarchischer Reihenfolge):

1. Die **Projektive Geometrie** (charakteristische Invarianten sind hierbei: Gerade, Inzidenz von Punkt und Gerade). Denn sollen bei der Betrachtung auch die unendlich fernen Punkte eingeschlossen werden, befindet man sich im Bereich projektiver Transformationen. Hier liegt die Feststellung zu Grunde, daß sich zwei Geraden einer Ebene, die keine zwei Punkte gemeinsam haben z. B. stets in genau einem Punkt schneiden (auch dann, wenn sie parallel sind).
2. Die **Affine Geometrie** (charakt. Invar.: Parallelität) umschließt Transformationen, bei der sich diejenigen Eigenschaften von Figuren nicht verändern, wie es z. B. bei Parallelität zweier Geraden der Fall ist, bei denen sich das Verhältnis der Abstände je zweier Punktepaare auf einer Geraden nicht verändert. Nach affinen Transformationen von Figuren bleiben ebenfalls auch die Streckenverhältnisse unverändert.
3. Die **Ähnlichkeitsgeometrie** (charakt. Invar.: Winkelgröße, Streckenverhältnis)
4. Unter die **Kongruenzgeometrie** (charakt. Invar.: Streckenlänge) fallen die Transformationen von Figuren, bei denen ihre Eigenschaften erhalten bleiben. Lediglich die Lage der abgebildeten Figuren ändert sich. Man unterteilt in gleichsinnige (Verschieben, Drehen) und gegensinnige (Spiegeln) Kongruenzabbildungen.

Jede dieser genannten Abbildungsgruppen ist eine Untergruppe aller der darüber aufgeführten.

An letzter Stelle soll hier in Anlehnung an KLOSE/KRAUTER[2] noch das Gebiet der (kombinatorischen) **Topologie** genannt werden, das „ursprünglich als Geometrie der

---

[1] 1984, S.24

[2] 1976, S. 56ff

Lage die Eigenschaften geometrischer Gebilde (Kurven, Flächen, Räume) behandelte“[1]. In der modernen Topologie werden diejenigen „Eigenschaften des Raumes [betrachtet], die bei stetigen Verformungen unverändert (invariant) bleiben“[2]. Bei „ganz allgemeinen Bewegungen, wie Dehnen, Stauchen, Biegen und Verwinden“[3] bezieht sich die Topologie auf Kriterien, wie z. B. *geschlossen*, *offen*, *innen*, *außen*, *auf dem Rand liegend*, *neben*, *getrennt*, *schneiden*, *berühren* u. a.

## 2.2 Zu den geometrischen Themen, von denen ein Verständnis durch Papierfalten in der Grundschule entwickelt werden kann

Da der Titel meiner Arbeit den zu behandelnden Bereich der Geometrie eingrenzt, werde ich mich dementsprechend hier auch nur auf den *euklidischen Raum* und somit auf die Ebene und den Raum beschränken. Dies resultiert aus der Forderung, den Geometrieunterricht der Grundschule an der unmittelbaren Anschauung auszurichten (unsere Wahrnehmung begrenzt sich auf das Dreidimensionale) - also anschaulich zu gestalten und eben nicht nur auf Axiomen aufzubauen. Letzteres ist vor allem für das hypothetisch werdende Denken, das erst ab dem 5. Schuljahr allmählich erlernt und trainiert werden kann bzw. soll, von Bedeutung.

## 2.3 Historische Stationen zur Entwicklung der Geometrie

Die ältesten Aufzeichnungen stammen aus Ägypten. Gleichzeitig sind es auch die wenigsten, machen aber deutlich, daß schon in vorgeschichtlicher Zeit die Menschen, auf-

[1] Der Brockhaus Bd. 5, 1993, S. 298

[2] DIENES, 1969, S.10

[3] BESUDEN, 1984, S.17

grund der hauptsächlich praktischen Auseinandersetzung mit dem uns umgebenen Raum (in erster Linie bei der Einteilung der Felder), Erfahrungen sammelten und sich daraus wohl damals schon einfache geometrische Tatsachen ergaben.[1]

Dennoch kann man laut HAYEN[2] sagen, daß die Geometrie ihren ersten ernstzunehmenden Ursprung erst im Altertum bei den Griechen hat, wo die Menschen vermehrt das Bedürfnis hatten, ihr Land zu vermessen und Berechnungen für Tempel und Kultstätten aufzustellen.. Vor allem die berühmten Geometer THALES, PYTHAGORAS, HIPPOKRATES, PLATON, EUKLID, ARCHIMEDES, APOLLONIOS haben durch ihre Leistungen zur Gründung einer durch Beweise aufgebauten systematischen Geometrie beigetragen.[3]

Erst im 4. Jh. v. Chr. hat EUKLID die Figuren und Körper selbst zum Gegenstand geometrischer Überlegungen gemacht und hat das daraus resultierende Wissen in seinem Lehrbuch, ***Die Elemente***, in einer systematischen und bis ins 19. Jahrhundert einzigartigen Form niedergeschrieben (euklidische Geometrie).[4] Basis dieser ersten abstrakten mathematischen Theorie waren Definitionen, Postulate und Axiome, aus denen schließlich die axiomatische Theorie entstand. Zum wesentlich Inhalt gehört hierzu die Dreieckslehre einschließlich der Kongruenzsätze, die Grundkonstruktionen, die Parallelenlehre und der Satz des Pythagoras.

Im Mittelalter erzielten zunächst die Araber weitere Fortschritte, während im Abendland erst im Humanismus und in der Renaissance geometrische Fragen von Interesse waren. Bedeutende Geometer des Spätmittelalters waren im 15. Jh. G. von PEUERBACH und REGIOMONTANUS und im 16. Jh. J. KEPLER und P. GULDIN.

Weitere herausragende Persönlichkeiten auf dem Gebiet der Geometrie waren im 17. Jh. B. CAVALIERI, G. GALILEI, G. DESARGRES, R. DESCARTES, B. PASCAL, C. HUYGENS, I. NEWTON und G. W. LEIBNIZ, im 18. Jh. C. MACLAURIN, L. EULER, J. L. LAGRANGE und G. MONGE und im 19. Jh. J. V. PONCELET, J. STEINER, A. F. MÖBIUS, J. PLÜCKER, L. O. HESSE, F. BOLYAI, N. LOBATSCHEWSKI und C. F. GAUß.

---

[1] Der Brockhaus Bd. 2, 1993, S. 333

[2] 1982, S.42

[3] Vgl. Der Brockhaus Bd. 2, 1993, S. 333

[4] Vgl. bei SCHWARTZE, 1984, S. 11

Über 2000 Jahre galt EUKLIDS Werk als die „einzige Grundlage der Geometrie“[1], bis im 19. Jahrhundert seine Untersuchungen von den Eigenschaften der Figuren durch eine reine Betrachtung der geometrischen Abbildungen eine neue Perspektive erhielt: David HILBERT (1862-1943) und KLEIN (1849-1925) entdeckten Lücken in EUKLIDS Beweisführungen und ergänzten diese mit neuen Erkenntnissen. Nach Ansicht von HAYEN[2] ist vor allem KLEIN dafür verantwortlich zu machen, daß somit die Elementargeometrie in eine Form gebracht wurde, die ihr es ermöglichte, immer mehr in die Schulen einzudringen, um in der sogenannten *Figurenlehre* im Unterricht untersucht zu werden.

[1] Meyers Neues Lexikon Bd. 3, 1993, S. 225

[2] 1982, S. 42-43

*„Leitziel für den Geometrieunterricht sei es,*
*daß Geometrie unterrichtet wird."*
(Hans FREUDENTHAL, 1991)[1]

# 3 GEOMETRIE IN DER SCHULE

Um letztendlich dem Anspruch einer Rechtfertigung für eine Behandlung der Geometrie im Unterricht darlegen zu können, wenigstens ansatzweise nachzukommen, soll zunächst in einem groben Überblick das recht träge fortschreitende Ausbreiten der Geometrie im Unterricht in einer historischen Betrachtung (Kap. 3.1) bis hin zur Darstellung der gegenwärtigen Situation im Mathematikunterricht (Kap. 3.2) aufgezeigt werden. Im anschließenden Kapitel werde ich versuchen, eine möglichst transparente - aber vorerst doch nur oberflächliche - Argumentation für Geometrie im Unterricht, anhand der Bedeutung der Beschäftigung mit geometrischen Themen für die (Denk-) Entwicklung der Kinder im Grundschulalter, zu liefern. Oberflächlich anhand von Stichpunkten deshalb, weil die Gesamtheit meiner Arbeit eine Argumentation dafür sein sollte.

## 3.1 Zur Entwicklung des Geometrieunterrichts

Wie in Kapitel 2.3 schon erwähnt galt das von EUKLID hervorgebrachte Werk, ***Die Elemente***, über mehrere Jahrhunderte als das einzige Lehrbuch für die Geometrie. Das Lehrbuch enthielt einen systematischen Aufbau und sah somit einen „starren Lehrgang der Geometrie"[2] vor.

Erste Impulse zur Behandlung geometrischer Themen für die Primarerziehung forderten erstmals Johann Amos COMENIUS (1592-1670), PESTALOZZI (1746-1827), FRÖBEL (1782-1852) und andere Pädagogen. So forderte Pestalozzi in seinem ***ABC der Anschauung*** (um 1800), daß der Unterricht die **Dinge der Umwelt** zum Gegenstand haben

[1] Zitiert nach RADATZ/RICKMEYER, 1991, S. 9

[2] BESUDEN, 1984, S. 5

muß, um anschaulich und kindgemäß sein zu können. Diese Forderung unterstützte FREUDENTHAL noch nachträglich, indem er die „Geometrie als Erfahrung und Deutung des Raumes, in dem wir leben, atmen und uns bewegen“ [1] verstand.
Laut SCHWARTZE/FRICKE[2] konnten sich ihre Gedanken und die daraus resultierende Gestalt- und Formenkunde zuerst aber nur in den spielerischen Tätigkeiten der Kindergarten- und Vorschularbeit durchsetzen.

Durch die ***Meraner Vorschläge*** von 1905 erhielt der Geometrieunterricht erneut Impulse: Konnte KLEIN noch 1872 in seiner Erlanger Antrittsvorlesung die Fachwissenschaft mit dem *geometrischen Einteilungsprinzip* der Gruppentheorie erweitern, so gelang ihm diesmal in seinen Vorlesungen eine plausible Darstellung über die Notwendigkeit einer Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und ebnete somit den Weg für den Einzug des Prinzips der abbildungsgeometrischen Methode in die Schulen.

Im weiteren Verlauf der Reformbemühungen des Mathematikunterrichts in der Grundschule nahmen dann die Erkenntnisse aus den PIAGETschen Untersuchungen (siehe Kap.4.1) zur Entwicklung des räumlichen Denkens in entscheidender Weise Einfluß. Auf ihnen beruht auch letztendlich, daß der Geometrieunterricht später ein wichtiger Bestandteil des mathematischen Grundschulcurriculums wurde.[3] (siehe u.a. Kap. 3.3).

Zwar entsprach der Geometrieunterricht bis Ende der 60er Jahre einerseits einem auf die Fachsystematik orientierten Konzept, sowie Konstruktionen und Beweise betonenden Geometrieunterricht an den Gymnasien und andererseits wohl eher noch dem Charakter einer „volkskundlichen Raumlehre“[4], die hauptsächlich auf Berechnungen und Formelnanwendungen orientiert war (vor allem auf das Problem der Längenmessung - und das auch noch - in „recht unzulänglicher Weise“[5]), erhielt aber 1968 dann endlich durch

---

[1] Zitiert nach BESUDEN, 1984, S. 5

[2] 1983,S. 124

[3] Vgl. bei RADATZ/RICKMEYER, 1991,S. 4

[4] GEHWEILER, 1994, S. 43

[5] SCHWARTZ, 1983, S. 124

die Forderungen in den ***KMK-Empfehlungen*** erstmals geometrische Inhalte, wenn auch nur mit einem „äußerst mageren Themenkreis g*eometrischer Grundbegriffe*“[1] für die **Grundschule**. Diese Ausdehnung des Geometrieunterrichts auf die Grundschule konnte sich ‚nach Auffassung von BESUDEN[2], dennoch aufgrund zahlreicher Vorschläge und erprobter Konzeptionen, wie sie z. B. von H. BAUERSFELD, H. WINTER, H. BESUDEN entwickelt worden sind, fest verankern.

## 3.2 Zur gegenwärtigen Situation der Geometrie im Mathematikunterricht der Grundschule

1975 stellten HAYEN[3] und seine Mitarbeiter fest, daß ein Konsens in der (offensichtlich: gesamten!) Didaktik darüber herrsche, daß Geometrie einen festen Platz im Mathematikunterricht haben müsse. Trotzdem wird aber in der nahezu sämtlichen Literatur diesbezüglich der vorhandene geringe Stellenwert in der Unterrichtspraxis der Grundschule beklagt - die bizarrsten Formulierungen deuten darauf hin:

- Die Geometrie spielt ein eher „stiefmütterliches Dasein“[4] in der Unterrichtspraxis
- Geometrische Themen dienen in den Grundschulen eher der Unterhaltung denn als *richtige Mathematik*[5]
- „Grundschul-Stiefkind Geometrie“[6]
- Die Geometrie führt in der Unterrichtspraxis „ein Aschenputteldasein“[7]

---

[1] BESUDEN, 1984, S. 5

[2] Ebenda.

[3] 1975, S. 16

[4] RADATZ/RICKMEYER, 1991, S. 4

[5] vgl. bei BAUERSFELD, 1992, S. 7

[6] BAUERSFELD, 1993, S. 8

[7] BAUERSFELD, 1993, S. 8

- „Die ausgefallenen [Geometrie-] Seiten im Mathematikbuch“[1]
- Geometrie nimmt im Verhältnis zur Arithmetik nur eine Randstellung [im Mathematikunterricht] ein[2]

u. v. m.!

RADATZ/RICKMEYER[3] begründen diese „überaus unbefriedigende“ Situation durch den Anschein, daß in vielen Mathematikbüchern die geometrischen Themen zusammenhangslos neben den anderen Bereichen stehen und somit ohne weiteres bei Zeitnot übergangen werden können. GUDER[4] und ebenso RICKMEYER/RADATZ[5] vermuten weiter, daß der Grund dafür das Fehlen eines hierarchisch aufgebauten und dadurch unwichtig erscheinenden Geometrielehrgangs sei, der allerdings aber auch in keiner Weise für die Grundschule dargeboten werden könne. Die Niedersächsischen Rahmenrichtlinien für den Mathematikunterricht in der Grundschule[6] (siehe Kap. 3.3.3) fordern sogar aus diesem Grund, den Unterricht mit geometrischem Inhalt nicht am fachsystematischen Aufbau, sondern u. a. eher anhand einzelner Probleme auszurichten.

Weitere Gründe für den geringen Stellenwert der geometrischen Inhalte im Mathematikunterricht sehen die o. g. Autoren in der fehlenden Überzeugung vom Nutzen und der Überforderung der Grundschullehrer in methodischen und sachlichen Fragen. Ebensowenig attraktivitätssteigernd betrachten sie die Mehrarbeit durch den oftmals hohen Zeit- und Materialaufwand für die Durchführung eines Geometrieunterrichts.

Auch die bei Rechenarbeiten so einfache Methode der Punkteverteilung für die Leistungsbeurteilung ist nach RADATZ/RICKMEYER[7] nicht so ohne weiteres auf die geometri-

---

[1] Titelthema einer Lehrerfortbildung in ROOS, 1997, S. 4

[2] vgl. bei RADATZ U. A., BD. 1, 1996, S. 114

[3] 1991,S. 4

[4] 1991, S. 6

[5] Ebenda.

[6] 1984, S. 59

[7] Ebenda.

schen Leistungen übertragbar und macht gerade die z. T. in den Schulen noch notwendige Zensierung schwierig.

Die Auflistung der Ursachen beenden RADATZ/RICKMEYER mit der, m. E., äußerst provokativen Frage, ob nicht „das Arbeiten mit geometrischen Materialien für einige Kollegen / Kolleginnen eine zu große Unruhe in den Unterricht“[1] brächte.

Dieser ganzen Vorurteile kann das Papierfalten allerdings kaum gerecht werden:

1. Papier ist billig,
2. Papier ist leicht zu beschaffen (sieht man von vorzufertigenden Formen, wie Quadrat, Dreieck, Vieleck, Kreis, ab,),
3. Papier macht kein Krach (bis auf das Spielen mit der Knalltüte[2]),
4. viele Problemstellungen benötigen nicht einmal große Vorbereitungen (abgesehen von den zu kopierenden Vorlagen mit den Faltkonstruktionen bzw. Ausgangsformen und den selbst angeeigneten Faltfolgen der Figuren zum Vormachen).

Eine allgemeingültige Beschreibung der tatsächlichen Unterrichtspraxis, in denen geometrische Themenbereiche behandelt werden, ist kaum möglich. Vielmehr ist sie mindestens so verschieden, so viele Bundesländer es gibt. Aber nicht, daß etwa die derzeit 16 gültigen Lehrpläne der einzelnen Bundesländer allein dafür Verantwortung tragen, sondern hinzu kommt, daß aus den o. g. Gründen Geometrieunterricht von Schule zu Schule und nochmals wieder von Lehrer zu Lehrer individuell verschieden ist, sowie, in Anlehnung an ROOS[3], auch jeweils der aus den Elternerwartung entstehende Druck nach Rechnenlernen ihrer Kinder dafür überhaupt Raum bietet. Dennoch gilt die Forderung nach mehr geometrischen Inhalten im Mathematikunterricht.

---

[1] Ebenda.

[2] Dazu näheres in Kap. 7.9

[3] 1997, S. 4

## 3.3 Bedeutung und Notwendigkeit des Geometrieunterrichts in der Grundschule

Im folgenden Kapitel sollen aus verschiedenen Perspektiven Gründe aufgeführt werden, die einen Geometrieunterricht für die Grundschule rechtfertigen. Gleichzeitig sollen daran die Ziele und somit auch die Aufgaben der Grundschulgeometrie hergeleitet werden. Abschließend werden diese dann in einer Übersicht zusammengefaßt. Für deren Verwirklichung werde ich der Vollständigkeit halber auf einige möglichen Inhalte und einiger Aspekte methodischer Gestaltung eingehen, wobei diese auf dem Hintergrund von Kap. 3.2 nur als Empfehlungen dienen können.
Dabei läßt es sich nicht vermeiden (wie so oft in meiner Arbeit), einige Punkte vorweg schon einmal anzureißen, die später in anderen Kapiteln ausführlicher behandelt werden.

### 3.3.1 Versuch einer Begriffsbestimmung

Diesen kurzen Abschnitt füge ich ein, um klar zu stellen, daß in der Fachliteratur die Begriffe *Grund*, *Aufgabe*, *Ziel* und *Inhalt* bezüglich des Geometrieunterrichts in der Grundschule nicht einheitlich - z. T. sogar eher verwirrend - verwendet werden, was offensichtlich mit den sich überschneidenden Bedeutungen zusammenhängt.
In den folgenden Kapiteln benutze ich jeweils diejenigen Begriffe, die in dem jeweils von mir angegebenen und verarbeitetem Dokument ebenfalls verwendet wurden.

### 3.3.2 Begründungen, Ziele, Aufgaben und Inhalte des Geometrieunterrichts in der Grundschule

Gleich zu Beginn dieser Arbeit wurde auf die Herkunft und die Bedeutung des Begriffs *Geometrie* verwiesen: Demnach ist die Geometrie aus dem natürlichen Bedürfnis des Menschen ‘entstanden’, den Raum, in dem wir leben, zu erschließen. Daß ebenso Kinder auf Schritt und Tritt in ihrer Umwelt geometrischen Phänomenen begegnen und dabei zwangsläufig Erfahrungen sammeln, ist nach Auffassung u. a. von FLOER/FORTHAUS[1] daher allein schon Grund, diese in der Grundschule aufzugreifen und behutsam weiterzuentwickeln. HOMANN[2] unterstützt diese These, denn nach seiner Erkenntnis gibt es innerhalb der Mathematikdidaktik kaum eine andere Frage, die unter den Fachleuten so wenig kontrovers diskutiert würde, wie die nach der Bedeutung des Geometrieunterrichts in der Grundschule. Doch sieht man hier nicht nur allein die Möglichkeit, wichtige Erfahrung zur **Umwelterschließung**, sondern ebenso auch die Möglichkeit, wichtige Erfahrungen zur Entwicklung kognitiver Fähigkeiten im Bereich des **räumlichen Vorstellungsvermögens** und **räumlichen Denkens** zu machen. FLOER[3] verweist auf den direkten Zusammenhang zwischen Umwelterfahrungen und mathematischen Einsichten und befindet die Geometrie als <u>den</u> Themenkreis der Mathematik, in dem diese Bereiche so untrennbar wie in keinem anderen miteinander verbunden seien. RADATZ U. A.[4] betonen darüber hinaus, daß die „Entwicklung der geometrischen Kompetenz [...] als eines der wichtigsten Ziele der gesamten Grundschulmathematik angesehen werden“ könne und daß „mathematisches Denken ohne geometrische Vorstellungen kaum möglich“ sei.

Der gesamte Mathematikunterricht ist demnach von viel weitgehender Art und wird von SCHWARTZE/FRICKE[5] sogar als **Denkerziehung** bezeichnet. Für den Geometrieunterricht in der Grundschule trifft dieses in jedem Fall zu. Denn spätestens seit den Erkenntnissen aus den PIAGETschen Untersuchungen (siehe Kap. 4.1) weiß man, daß die Entwicklung der Intelligenz eng mit der Raumerfassung zusammenhängt: „Das intelligente Verhalten des Kindes [entwickelt] sich aus eigenen Handlungen mit Gegenständen im Raum, die später in bewegliche Vorstellungen übergehen“[6]. In unserer Sprache schlägt

---

[1] 1991, S. 24. Vgl. hierzu auch FLOER, 1987, S. 52

[2] 1991, S. 8

[3] FLOER, 1987, S. 52

[4] 1996, S. 114

[5] 1983, S. 124ff

[6] SCHWARTZE/FRICKE, 1983, S. 125

sich „dieser enge Zusammenhang von Denken und räumlichen Vorstellungen“[1] in vielen Formulierungen und Wörtern nieder. (z. B. vorstellen, hinterherfahren, zusammenlegen, wegnehmen, dazutun, dazwischen stehen, hochstellen, usw.).
SCHWARTZE/FRICKE sehen die Entwicklung der räumlichen Vorstellung aufgrund „dieser starken räumlichen Komponente der Intelligenz“[2] als wesentliche Aufgabe des Geometrieunterrichts und im besonderen die des Geometrieunterrichts der Grundschule. „Dabei ist unter Raumvorstellung nicht nur die statische Komponente des Sichvorstellenkönnens ebener und räumlicher Konfigurationen zu verstehen, sondern vor allem die *dynamische* Komponente, die die Fähigkeit umfaßt, mit den Konfigurationen gedanklich zu operieren, insbesondere gedanklich *Transformationshandlungen* mit ihnen auszuführen und Anfangs- und Endlage zueinander in Beziehung zu setzen.“[3]

Die **allgemeinen Ziele** der Grundschule geben ebenfalls Anlaß, den Kindern Unterricht mit geometrischen Inhalten grundsätzlich anzubieten. RADATZ U. A.[4] haben die allgemeinen Ziele der Grundschule, die möglichst in allen Unterrichtsfächern angestrebt werden sollen, wie folgt zusammengefaßt. Demnach gilt

- „die Erschließung der und die Orientierung in der Umwelt,
- die Förderung und Ausbildung
    - kognitiver Fähigkeiten,
    - der Sprache und Ausdrucksfähigkeit,
    - der sozialen Kompetenz und
    - des selbständigen Lernens“.

Um die Entfaltung dieser kognitiven, emotionalen, motorischen und sozialen Fähigkeiten der Schüler fördern zu können, ist nach Ansicht der eben genannten Autoren ein Lernen in komplexen Sinnzusammenhängen notwendig. Aber auch andere **allgemein-didaktische Grundsätze** der Pädagogik, wie etwa Lernfreude, Lebensnähe, spielerisches Lernen, Differenzierung, Förderung, Selbständigkeit, entdeckendes Lernen, offe-

[1] Ebenda.

[2] Ebenda.

[3] Ebenda.

[4] 1996, S. 114

ner Unterricht, Praxisbezogenheit, Anwendungsorientierung, werden zum Erreichen dieser Ziele in der Literatur[1] aufgeführt. RADATZ/RICKMEYER[2] sehen die Geometrie als den dafür am besten geeignete Inhaltsbereich des Grundschulgesamtcurriculums an. FLOER/FORTHAUS[3] sind in Anlehnung an FREUDENTHAL der Meinung, daß gerade hier die meisten Möglichkeiten für Entdeckungen mit Augen und Händen, mit einem großen Spielraum für Versuche, Vermutungen und Begründungen vorhanden sind. Solche Forsch- und Ausprobieraktivitäten benötigen Freiraum im Unterricht - dieser wird mit offenem Material in offenen Lernsituationen hergestellt (hier sind besonders die Bereiche Freiarbeit, Projekt- und Wochenplanunterricht geeignet). Denn „wenn das Mathematisieren als ein prinzipiell subjektiver Interpretations- und Konstruktionsprozeß verstanden wird, dann verschiebt sich der Fokus des Lehrens weg von Wissensvermittlungs- und Übernahmevorstellungen auf die Förderung und Anpassung dieser subjektiven Konstruktionen.[...] Anders gesagt: Die interaktiven Klärungsprozesse originalen Denkens, ihre Ermutigung und ihre Unterstützung gewinnen Vorrang vor den Korrekturteilen über die Endprodukte."[4] Werden solche Situationen offenen Problemlösens geboten und das kreative Arbeiten nicht behindert, kann nach RADATZ U. A.[5] somit auf dem Hintergrund der Denkerziehung (s. o.) das selbständige Lernen und das selbständige Denken gefördert werden.

Aus den vorangegangen Abschnitten wird die Auffassung von SCHWARTZE/FRICKE[6] leicht nachvollziehbar, daß nämlich die Ziele des Geometrieunterrichts nicht bloß nur die systematische Erarbeitung von Merk- und Lehrsätzen sein sollte. Denn auf diese Weise läuft man der Gefahr entgegen, wohl abfragbares Wissen zu besitzen, aber kein fundamentales Verständnis der Begriffe und Beziehungen entwickelt zu haben, das für

---

[1] Vgl. u. a. bei RADATZ, 1991, S. 7

[2] 1991, S. 7

[3] 1991,S. 24

[4] BAUERSFELD, 1992, S. 10

[5] 1998, S. 113F

[6] 1983, S. 124

einen später darauf aufbauenden systematischen Lehrgang notwendig ist. Diesbezüglich kann der Geometrieunterricht in der Grundschule als **Propädeutik** betrachtet werden: Er soll als eine Einführung in den Themenbereich und zu einem Erwerb von Vorkenntnissen dienen, die später zu einem vertieften Studium führen können. „Ohne diese Vorerfahrungen fehlt die Basis für das spätere Lernen. Daher dürfen die Chancen in der Grundschule nicht vertan werden.“[1] RADATZ/RICKMEYER[2] bemängeln allerdings diese einseitige Ausrichtung der Grundschulgeometrie, wie sie z. T. in der fachdidaktischen Literatur vorzufinden ist (häufiger in älteren Werken, wie z. B. bei LAUTER[3]), und messen „dem Geometrieunterricht in der Grundschule eine eigenständige Bedeutung zu, die auch durch die zahlreichen fachübergreifenden Beziehungen und Möglichkeiten (Raumerfahrungen und Raumgestaltung in der Kunst, naturkundliches Lernen in der Umwelt, geographische Aspekte des Sachunterrichts u. a. m.) verstärkt wird.“[4] Neben den sich hieraus ergebenen inhaltlichen Aspekten, wie etwa das Geometrisieren lernen, Raumerfahrungen vertiefen und geometrische Verfahren und Techniken erproben, gehört das Fördern einer positiven Einstellung zur Mathematik allgemein und das Hervorrufen einer Bereitschaft zum selbständigen Lösen von Problemen zu den Aufgaben des Geometrieunterrichts in der Grundschule. Die Grundschule sollte Unterrichtsmethoden für den Geometrieunterricht anbieten, die nach BAUERSFELD[5] dem Schüler ermöglichen, die Arithmetik mittels der Geometrie anschaulich zu erleben, sich in letztere allerdings beiläufig im Tun eingewöhnen, um letztendlich ein tiefgreifenderes Verständnis als Grundlage für den später folgenden Mathematikunterricht zu bieten.

Da nach FLOER/FORTHAUS[6] nun einerseits die Geometrie nicht als formales System erfahren und daher auch nicht formale Fertigkeiten erworben werden sollen und anderer-

---

[1] FLOER/FORTHAUS, 1991, S. 25

[2] 1991, S. 9

[3] 1978, S. 189ff

[4] RADATZ/RICKMEYER, 1991, S. 9

[5] 1992, S.11-16

[6] 1991, S. 24. Vgl. hierzu auch FLOER, 1987, S. 54

seits dadurch, daß man über das Suchen, das Betrachten und das Darüber-reden von Grundformen hinaus geht, ebenso Objekte nicht bloß nur analysiert und sie im nachhinein anwendet, sondern sie *gebraucht*, entwickeln sich erst geometrische Ideen. Denn durch den Gebrauch geometrischer Objekte ermöglichen sich für die Kinder Chancen, um an diesen Entdeckungen zu machen. Zwar werden sie „nicht so zielstrebig zu einer *exakten* Beschreibung führen, dafür aber zu einem tiefergehenden Verständnis“[1]. Sie sollen Gesetzmäßigkeiten erkennen und lernen, Regeln aufzustellen - was keineswegs gegen selbständiges Lernen und Entdecken spricht. SCHWARTZE/FRICKE[2] sind der Ansicht, daß sich die geometrischen Begriffe zunehmend klarer entwickeln und eine allmählich präziser werdende Sprache fördern.

An dieser Stelle möchte ich das Beispiel von FLOER[3] einfügen, um deutlich zu machen, daß Kindern sehr wohl die Möglichkeit geboten werden kann, z. B. an einem Rechteck[4] solche Entdeckungen zu machen, die zu Einsichten führen können, die auf mathematisch *fundamentalen Ideen*[5] basieren:

* „Ein Rechteck läßt sich so falten, daß je zwei benachbarte Ecken genau aufeinander liegen. Die Hälften sind wieder Rechtecke.
* Schneidet man Streifen ab, sind dies ebenfalls Rechtecke.
* Aus zwei gleichen Rechtecken kann man neue Rechtecke legen, man braucht nur gleich lange Seiten zusammenzufügen.
* In jede Ecke eines Vierecks paßt ein Winkel, den man durch zweimaliges Falten eines Stück Papiers erhält.
* Legt man zwei Rechtecke Seite an Seite aneinander, gibt es immer eine gerade Linie.

---

[1] FLOER, 1987, S. 54

[2] 1983, S. 126

[3] 1987, S. 54F

[4] Folgt man Heinrich BESUDENs Auffassung muß die Bezeichnung lauten: *rechteckiges Stück Papier*. Ein Rechteck ist eine in der Fläche definierte Figur, die durch ein Papierstück veranschaulicht werden kann. Die Schüler stört es nicht, daß Papierstücke eine gewisse Dicke haben und damit streng genommen Körper darstellen (Vgl. BESUDEN, 1988, S. 4.1). In dieser Arbeit wird aber nur von Dreiecken, Rechtecken, Quadraten usw. die Rede sein. Damit sind Papierstücke in dementsprechender Form gemeint.

[5] Hierbei „handelt es sich um Ideen, die starke Bezüge der Wirklichkeit haben, verschiedene Aspekte und Zugänge aufweisen, sich durch hohen inneren Beziehungsreichtum auszeichnen und in den folgenden Schuljahren immer weiter ausgebaut werden“ (WINTER, 1976, S. 15).

* Die gegenüberliegenden Seiten eines Rechtecks sind gleich lang, ebenso wie die Diagonalen.
* ...“

(FLOER fügt hinzu, daß man aus fast jeder dieser Einsichten eine operative Definition für Rechtecke machen könne.)

Daß die oft spielerischen Übungen und der Umgang mit konkretem Material allen Kindern Erfolge bietet und Spaß macht, erwähne ich hier nur aus dem Grund, um darauf hinzuweisen, daß dieses auch für rechenschwache Kinder gilt. RADATZ U. A.[1] haben erkannt, daß sie ihnen (wieder) helfen eine positive Einstellung zu diesem Fach zu entwickeln. Die Förderung der Lernmotivation ist u. a. aber auch aufgrund des großen Spektrums der **Differenzierung** (Berücksichtigung der Lernvoraussetzungen) und dem **Prinzip der Lebensnähe** gegeben. Denn laut FLOER gibt es „einerseits [...] keine geometrische Idee, die ihre Wurzeln nicht in der Umwelt hat (Formen, Symmetrie, Flächeninhalt, ...), andererseits helfen geometrische Einsichten, die Welt (ein wenig) besser zu verstehen:

- Ob ein Drache gut gebaut wird, der gut im Gleichgewicht bleibt,
- ein Wanderweg auf der Karte gesucht,
- das Kinderzimmer mit Teppichfliesen ausgelegt,
- ein Lampion für den Martinszug hergestellt,
- ein Weihnachtsstern geklebt,
- ein Blumenbeet angelegt,

immer ist Geometrie mit im Spiel.“[2] Unschwer lassen sich m. E. noch eine überaus große Vielzahl von ähnlichen Situationen aufzählen, in denen Kinder mit z. T. ‘verborgenen’ geometrischen Inhalten konfrontiert werden. Dabei, so empfiehlt FLOER, sind „die in ihnen verborgenen geometrischen Ideen sichtbar zu machen und möglichst mit Hilfe geometrischer Einsichten zu einer Erweiterung und Vertiefung der Umwelterfahrungen beizutragen.“

[1] 1996, S. 114

[2] 1987, S. 52

#### 3.3.2.1 Übersicht über die Gründe, Aufgaben, Ziele und Inhalte für einen Geometrieunterricht in der Grundschule

**Gründe**

Zusammenfassend sollen hier noch einmal nach WINTER[1] die *zwingenden Gründe* aufgelistet werden, die für eine frühe Beschäftigung mit der Geometrie sprechen:

1. Zusammenhang von Denken und Raum
2. Entdeckung des Raumes
3. Hinführen zum Messen
4. Förderung der Kreativität
5. Propädeutik der systematischen Geometrie

**Aufgaben und Ziele**

Die allgemeinen Aufgaben und Ziele für den Geometrieunterricht in der Grundschule sind nach SCHWARTZE/FRICKE[2] und BESUDEN[3]:

1. „Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens als einer bedeutsamen und praktisch relevanten Intelligenzdimension.
2. Ordnen, Gliedern und Strukturieren der Umwelt, unterstützt durch Modelle, durch Bau- und Legematerialien.
3. Ausbildung des konstruktiven Denkens und folgerichtigen Schließens, das sich auf Erfahrungen stützt und im Tun kontrollierbar ist.
4. Förderung kreativen Verhaltens und problemlösenden Denkens, unterstützt durch reichhaltiges Problemangebot.
5. Entwicklung von zunehmend klareren geometrischen Begriffen bei Verwendung allmählich präziser werdender Sprache.“

Für den Geometrieunterricht gelten diese Aufgaben nicht isoliert voneinander, sondern stützen und ergänzen sich gegenseitig.

---

[1] 1971, S. 40ff

[2] SCHWARTZE/FRICKE, 1983, S. 126

[3] 1984, S. 75

**Inhalte**

Die geometrischen Aktivitäten in der Grundschule, die in allen vier Grundschuljahren wiederkehren, lassen sich wenigstens immer einem der sechs folgenden Gebiete der Geometrie zuordnen. Diese Gebiete teilen sich auf in:

1. Topologische Aufgabenstellungen
2. Anordnungsprobleme
3. Symmetrieuntersuchungen
4. Formenkunde
5. Geometrische Größen
6. Raumgeometrie

Diese einzelnen Gebiete sind nicht von einander getrennt zu betrachten, weil eine Vielzahl an Überschneidungen sich zwangsläufig ergeben: z. B. sind einige Anordnungsprobleme auch topologischer Art, in der Raumgeometrie können ebenfalls Symmetrien untersucht werden und in die Formenkunde fließen auch raumgeometrische Betrachtungen mit ein. Diese Teilgebiete sollen nicht nacheinander auf die Schuljahre verteilt, sondern nach dem sogenannten Spiralprinzip behandelt werden.[1] Das bedeutet, daß sie nicht für eine bestimmte Schulstufe zur abschließenden Behandlung zurückgestellt werden sollen, sondern in möglichst jedem Schuljahr in angemessener Weise schon vorher anzubieten sind. „In sehr konkreten Formen beginnend, erscheint dann der Unterrichtsgegenstand nach Art einer Schraubenlinie dem Schüler immer wieder, jedesmal auf etwas höherem Niveau“.[2]

[1] SCHWARTZE/FRICKE, 1983, S. 127

[2] BESUDEN, 1984, S. 75

### 3.3.3 Inhalte, Aufgaben und Ziele nach den Niedersächsischen Rahmenrichtlinien

GUDER bedauert, daß sich viele Lernziele der Geometrie nicht so plausibel wie die der Arithmetik formulieren lassen. Für den Geometrieunterricht greifen seiner Meinung nach eher allgemeingültige Lernziele als die konkreten Wissens oder Fähigkeitszuwachs.

Die Rahmenrichtlinien in Niedersachsen fordern, daß „die Schüler im Umgang mit geeigneten Materialien selbständig Erfahrungen sammeln können und dadurch zu einem anschaulichen Erwerb geometrischer Grunderfahrungen und -begriffe kommen. Den Schülern sollten Möglichkeiten geboten werden, konkrete oder gedachte Handlungen in der Ebene und im Raum vorzunehmen [...]. Dabei stehen weniger die systematischen Antworten, sondern stärker die möglichen Fragestellungen als Impulse für geometrische Aktivitäten im Vordergrund“[1]

### 3.3.4 Konsequenzen für den Geometrieunterricht

Die **Konsequenz** für den Geometrieunterricht in der Grundschule ist ganz allgemein betrachtet, Raum bzw. Situationen für die Bearbeitung geometrischer Problemfelder zu schaffen. In denen sollen in Anlehnung an SCHWARTZE/FRICKE[2] die Schüler mit verschiedenem konkreten Material handelnd räumliche Erfahrungen sammeln und mit geometrischen Beziehungen experimentieren können.

Wie in Kap. 3.2 schon kurz angedeutet, kann der Geometrieunterricht in der Grundschule in keinen starren, hierarchisch aufgebauten Lehrgang eingebunden werden, der auf reinem logischem, mathematischem Denken beruht. Denn nach PIAGET[3] befinden sich die Kinder im Alter von ca. 7 - 11 Jahren vorwiegend im *Stadium der konkreten Operationen*. Ihr Denken ist folglich noch an konkrete Vorstellungen und an das dabei ver-

[1] Niedersächsischen Rahmnerichtlinien, 1984, S. 59

[2] 1983, S. 125

[3] In ZECH, 1981, S. 93

wandte Material gebunden (ausführlicher dazu in Kap. 4.1). Somit besteht hier die sich aufzwingende Möglichkeit des exemplarischen Lernens mit und an geometrischen Objekten.

# 4 PSYCHOLOGISCHE GRUNDLAGEN DES MATHEMATIK- UND GEOMETRIEUNTERRICHTS

Etwa um die Zeit der Jahrhundertwende wurden die ersten Untersuchungen von Psychologen bekannt, die sich vornehmlich mit dem Phänomen *Lernen* auseinandersetzten. Im Laufe der Zeit konnten sich einige theoretischen Konstruktionen durchsetzen. Die Ergebnisse aus diesen Untersuchungen über die Natur und dem Zustandekommen von Lernprozessen sowie die Entwicklung des Denkens bilden heute eine wichtige Basis der Didaktik der Mathematik[1]. Ohne die Kenntnisse der mathematischen Lernprozesse könne ein effektives und erfolgreiches Lernen kaum gewährleistet werden.

Umfangreiche Untersuchungen bezüglich des Lehrens und Lernens an Tieren haben zur Theorie des **Behaviorismus** geführt. Die Ergebnisse sind auch auf den Menschen übertragen worden. Der Lehrer übernimmt dabei „oft die Aufgaben des Präsentierens, des Anreizens, des kleinschrittigen Aufbereitens, des detaillierten Planens usw. [...], während die Rolle des Schülers im Lernprozess eher passiv gesehen wird im Sinne eines Sender-Empfänger-Modells.“[2]

Unter dem Oberbegriff des **Kognitivismus** wird der Schüler als aktiver Lerner in den Mittelpunkt gestellt. Man unterstellt ihm, daß er (nur) selbst in eigener Entscheidung und eigener Aktivität, handelnd sowie denkend im Sinne PIAGETs, Wissen oder Fertigkeiten anzueignen in der Lage ist.

Als Aufgabe dieser Arbeit betrachte ich es, einige grundlegende Theorieelemente zur Denkentwicklung zu nennen, soweit sie aus meiner Sicht für das Mathematik- und Geometrielernen von besonderer Bedeutung sind.

Dabei deckt sich meine Auffassung mit der von LAUTER[3], der behauptet, man käme bei der Betrachtung der psychologischen Bedingungen des Mathematikunterrichts nicht an den Forschungsergebnissen des Schweizer Kinderpsychologen Jean PIAGET vorbei.

[1] Vgl. bei SCHWARTZE/FRICKE, 1983, S. 155

[2] Radatz u. a., 1998, S. 11

[3] 1995, S. 13

Denn sie bilden die Grundlage vieler Modelle, die jeweils unter der Beachtung verschiedener Aspekte entstanden sind. Somit habe ich mich in dieser Arbeit, soweit wie erforderlich, hauptsächlich mit der PIAGETschen Psychologie und seiner genetischen Erkenntnistheorie beschäftigt, die die Entwicklung der Denkprozesse bei Kindern und Jugendlichen zu erklären versucht.

## 4.1 Die Psychologie von Jean PIAGET

Die Arbeiten des Schweizer Kinderpsychologen Jean PIAGET (1896-1980) und seinen Mitarbeitern des *Genfer Arbeitskreises* begannen in den zwanziger Jahren mit der Erforschung der Lernprozesse sowie der Entwicklung des Denkens. Bis heute gilt ihr Werk als die wohl umfassendste und bedeutendste Theorie des Erkennens. Eine Reihe weiterer psychologischer Theorien des Lernens bauen darauf auf. Obwohl an seinen Ergebnissen in einigen Einzelheiten Kritik geübt wurde, sind die Grundgedanken seiner Forschung nach wie vor von großer Bedeutung für den Mathematikunterricht in der Grundschule: Sie haben für den Zahlerwerb und für die Entwicklung des mathematischen Denkens die Grundlage geschaffen.

### 4.1.1 Die Äquilibrationstheorie

PIAGET geht davon aus, daß sich die Intelligenz in der Auseinandersetzung des Individuums (Kindes) mit seiner Umwelt genetisch bildet. Das bedeutet zugleich, daß die Intelligenz keine statische Komponente des Individuums ist, sondern sich ebenfalls der biologischen Entwicklung des Individuums ‘anschließt’ - sie ist also entwicklungsabhängig. Die Auseinandersetzung des Individuums mit seiner Umwelt erfolgt zwangsläufig, weil es auf dem fundamentalen Bedürfnis nach Gleichgewicht basiert. Denn das Individuum lebt in einer Umwelt, die Zwänge und Widerstände ausübt, sich ständig verändert und auf die Sinnesorgane des Individuums einwirkt, andererseits aber auch lebensnotwendigen Bedarf enthält. Umgekehrt verhält sich das Individuum aber auch nicht passiv, sondern versucht, die Umwelt in seinem Sinn zu verändern. Die so entstandene Wechselwirkung zwischen Individuum und Umwelt dient dazu, Spannungsgefälle abzubauen bzw. auszugleichen. Neben der Herstellung eines solchen Gleichgewichtszustandes versucht das Individuum einen solchen, sofern dieser erreicht ist, auch zu erhalten. PIAGET nennt diese Theorie die Gleichgewichtstheorie oder Äquilibrationstheorie. Die Wechselwirkungen finden nicht nur auf der affektiven (energetischen, motivationalen) Ebene statt, sondern besitzen ebenso einen kognitiven (strukturalen) Aspekt.

Nach PIAGET werden zwar keine intellektuellen Strukturen vererbt, wohl aber die Art, wie das Individuum mit der Umwelt in Wechselwirkung tritt. Hierzu gehören die funktionalen Invarianten Organisation und Adaption. Unter Organisation wird einerseits das Sammeln von Erfahrungen und das Testen von ‘Erfindungen’ verstanden. Andererseits arbeitet das Individuum ständig an den Resultaten der Wechselwirkungen, um sie letztendlich in einem einheitlichem *Bild der Wirklichkeit* zusammenzusetzen. Offensichtlich spielen dabei die Wahrnehmungen des Individuums eine entscheidende Rolle. Denn nach MATURANA/VARELA wird die Welt im Prozeß des Erkennens nicht einfach in der Seele abgebildet, sondern im Erkenntnisakt vom Subjekt selbst erschaffen. Dazu bauen wir sogenannte Schemata auf. „Ein Schema ist [...] ein ‘Operations-, Denk- oder Erklärungsmuster, das in die kognitive Gesamtorganisation des Individuums steuert’“[1] .Ein Schema ist demnach ein internes Teilbild von der Umwelt. Die formalen Strukturen der Mathematik, die Begriffe, Sätze, Grundgedanken und Theorien sind solche Schemata. Bei der Erschaffung von Vorstellungen des Individuums darf nicht vergessen werden, daß das Individuum auch in Wechselwirkung mit anderen Individuen (Gesellschaft) steht, was unerläßlich für gemeinsame Auffassungen ist. Doch stehen Umwelt und das Schema des Individuums nicht im Einklang, so versucht das Individuum seine Umwelt zu adaptieren. Die Adaption erfolgt durch zwei sich ergänzende Prozesse, die Assimilation und die Akkomodation. Bei der Assimilation versucht das Individuum gemachte

[1] WITTMANN, zitiert in LAUTER, 1995, S. 14

Erfahrungen dem bereits bestehenden Schema mittels bekannter Erklärungsmuster unterzuordnen. Bei der Akkomodation wird der Gleichgewichtszustand durch Abändern oder sogar durch Auflösung und Neuaufbau eines Schemas herbeigerufen. Eine Verhaltensänderung ist hier somit zu erwarten. Ein schnelles Bilden und gegebenenfalls Abändern der kognitiven Schemata ist nach PIAGET ein Zeichen für den intelligenten Menschen, da die Denkentwicklung immer eine Entwicklung zur größeren Beweglichkeit des Denkens ist. Das Gleichgewicht zwischen Umwelt und Schema ist nie statisch.
Die PIAGETschen Forschungen haben ergeben, daß jedes Kind in seiner Entwicklung eine bestimmte Reihenfolge mehrerer Stadien durchläuft (siehe weiter unten: PIAGETs Stadientheorie). Es beginnt mit Reflexen und Reiz-Reaktionskoppelungen beim Neugeborenen und entwickelt sich dann über verschiedene Stufen bis zum formallogischen Denken des Erwachsenen. Die zeitlichen Verschiebungen dieser Entwicklung sind jedoch oft sehr erheblich. Dennoch gewinnt das Gleichgewicht in jedem neuen Stadium an größerer Stabilität, weil die 'inneren Bilder von der Wirklichkeit' immer umfassender und mit immer weniger Widerstand konfrontiert werden.

Aber welche Schemata bildet denn nun das Kind im Lauf seiner kognitiven Entwicklung? PIAGET und seine Mitarbeiter haben aus den systematischen Experimenten mit Kindern drei grundlegende Ergebnisse herausgestellt. Danach heißt es, daß alle Kinder (1.) in gleicher Reihenfolge (2.) durch mehrere Stadien der Entwicklung des Denkens laufen, wobei jedes Stadium durch ganz spezifische Formen der Organisation charakterisiert ist, und (3.) der Übergang in ein neues Stadium nicht durch den Zugewinn neuer Schemata gekennzeichnet ist, sondern durch die Umorganisation vorhandener.

### 4.1.2 Die Stadientheorie

PIAGET unterteilt in seiner Stadientheorie die Intelligenzentwicklung des Kindes in fünf zeitlich aufeinanderfolgende Stadien:

| | Alter des Kindes in Jahren[1] | | Stadium |
|---|---|---|---|
| | 0 bis $1\frac{1}{2}$ | | Das sensomotorische Stadium |
| | $1\frac{1}{2}$ bis 4 | Phase des symbolischen u. vorbegrifflichen Denkens | **Das präoperative Stadium** |
| | 4 bis 7 | Phase des symbolisch-anschaulichen Denkens | **Das präoperative Stadium** |
| Grund-schul-alter | 7 bis 12 | Phase des logisch konkreten Denkens | **Das Stadium der konkreten Operationen** |
| | ab 12 | Phase des formalen Denkens | **Das Stadium der formalen Operationen** |

[1] WITTMANN, 1981, S. 70 (Altersangaben sind Durchschnittswerte. Erhebliche Zeitverschiebungen sind möglich)

Im Rahmen dieser Arbeit sollen nur die zwei Hauptphasen interessieren, die für ein Kind vom Vorschulalter bis zum Ende der Grundschulzeit charakteristisch sind. Das **sensomotrische Stadium** ist nämlich spätestens mit etwa zwei Jahren beendet und durch die schulische Entwicklung nicht mehr zu beeinflussen. Anzumerken ist, daß eine Störung in dieser Phase die spätere Entwicklung beeinflussen würde.

Das Erreichen des **präoperativen Stadiums** wird durch das Erlernen von Sprache und Symbolfunktion signalisiert. „Etwa um das 2. Lebensjahr macht das Kind, wie der Psychologe STERN sagt, die größte Entdeckung seines Lebens: Es entdeckt, daß jedes Ding einen Namen hat oder benannt werden kann.“[1] Es kennt also die symbolische Funktion der Sprache. Das Denken des Kindes kann mittlerweile Symbole benutzen, die an konkrete Handlungen und unmittelbaren Anschauungen gebunden sind[2], jedoch noch nicht solche, die dem Sinn des Zeichencharakters mathematischer Symbole entsprechen, sondern mit Handlungsinhalt gefüllt sind. Z. B. kann ein Holzklotz als Auto gedeutet und über die Tischplatte ‘gefahren’ werden. Dieses Beispiel macht auch schon eine weitere wesentliche Fähigkeit des Kindes in dieser Phase deutlich: Die symbolische Handlung ist zwar noch sehr nahe an der wirklichen Handlung angelehnt, ist aber vom Kind schon verinnerlicht worden. Das bedeutet, daß sich das Kind von der unmittelbaren Gegenwart lösen kann und somit die Fähigkeit erwirbt, über vergangene Handlungen nachdenken zu können bzw. zeitlich weit auseinanderliegende Ereignisse jetzt simultan erfassen kann. Diese sog. Reflexion über vergangene Handlungen setzt wohl allmählich ein, jedoch aber noch nicht die Fähigkeit, vollzogene Handlungen durch ihre Umkehrung rückgängig zu machen (Irreversibilität). Eine andere typische Einschränkung des Kindes in dieser Phase ist das gedankliche Nicht-verlassen-können der eigenen Perspektive (Egozentrismus) und die Tendenz zur Zentrierung auf ein Merkmal einer Situation, und zwar auf das der Wahrnehmung am naheliegensten. Zur Verdeutlichung möchte ich hierzu ein typisches Beispiel aufführen:

> Eine Knetgummikugel wird vor den Augen eines Kindes entsprechenden Alters zu einer Wurst geformt. Auf die Frage, was nun ‘mehr’ sei, antwortet das Kind, daß es die Wurst sei,

---

[1] Zitiert nach WITTMANN, 1981, S. 71f

[2] Nach ZECH, 1981, S. 92

weil sie länger ist. (Die Länge liegt nämlich hier der Wahrnehmung am nächsten. Die Dicke wird vernachlässigt).[1]

Für die Grundschule ist die Stufe des symbolisch-anschaulichen Denkens (präoperatives Stadium) und vor allem die Stufe des logisch konkreten Denkens (**Stadium der konkreten Operationen**), sowie der Übergang zwischen diesen beiden Stufen von Bedeutung. Es handelt sich hierbei um das Erlangen des *operatorischen Denkens*, also um die *verinnerlichte Form der Handlung*. Die Denkhandlungen werden zusammensetzbar und umkehrbar. PIAGET nennt solche Denkhandlungen (und nur solche) Operationen.[2] Sie gehen dabei aus Handlungen hervor, müssen also nicht immer an konkreten Gegenständen vollzogen werden, sondern können auch innerlich ablaufen.[3] „Die wichtigsten Eigenschaften von Operationen sind:

* **Kompositionsfähigkeit**, d.h. Operationen lassen sich zu ganzen Operationssystemen, sogenannten Gruppierungen, zusammensetzen
* **Assoziativität**, d.h. bei der Zusammensetzung von Operationen kommt es nicht auf die Reihenfolge an
* **Reversibilität**, d.h. eine Operation läßt sich umkehren. Zu jeder Operation gibt es eine entgegengesetzte Operation. Dies ist die Eigenschaft, die am leichtesten zur Identifizierung von Operationen beiträgt.“[4]

Der entscheidende Unterschied des Stadiums der konkreten Operationen gegenüber dem präoperatorischen Stadium wird schon in den beiden Begriffen selbst angedeutet: Das Fehlen des operatorischen Denkens, das durch die o. g. Kriterien gekennzeichnet ist. Der Fortschritt des Kindes in diesem Stadium ist daran zu erkennen, daß seine Denkhandlungen von größerer Beweglichkeit gekennzeichnet sind. Denn gerade durch die Kompositionsfähigkeit und Reversibilität kommt es zur *Organisation von Operationen*

---

[1] Nach ZECH, 1981, S. 92f

[2] Nach ZECH, 1981, S. 93

[3] LAUTER, 1995, S,. 16

[4] Ebenda.

*in Operationssystemen* (Gruppierungen). In Gedanken können nun ‘Handlungen’ vorgenommen werden, die nicht zuvor an konkretem Material erfahren werden mußten.
Es werden fundamentale logische Gruppierungen ausgebildet, auf deren Grundlage das Kind fähig wird, wichtige mathematische und physikalische Begriffe zu bilden. Jetzt ist das Kind in der Lage, die Invarianzbegriffe zu begründen. Zu den operativen Begriffen zählen u. a.

– Mengenbegriffe (Vereinigungsmenge, Schnittmenge, Teilmenge,);
– Größenbegriffe (Zahl, Länge, Flächeninhalt, ...);
– Symmetriebegriffe (Achsen- u. Drehsymmetrie [...]).[1]

Auf das Stadium des formalen Denkens, soll hier nicht näher eingegangen werden, da es, wie auch die Phase des symbolischen u. vorbegrifflichen Denkens, in der Regel nicht in die Entwicklung der Grundschulkinder greift. Kurz dargestellt ist das Denken in dem Stadium der formalen Operationen unabhängig von Erfahrungen mit konkretem Material. „Der Jugendliche wird allmählich befähigt, rein formal aufgrund von Annahmen zu schließen, ohne notwendigerweise auf Anschauung oder Erfahrung Bezug zu nehmen.“[2] Die Sprache (Aussagen) ist hier das Mittel, um Raum und Zeit zu überwinden. In diesem Stadium werden Objekte, Eigenschaften und Begriffe usw. durch *Namen* erfaßt Zustände und Operationen durch *Aussagen* oder auch *Befehle* charakterisiert.[3]

### 4.1.3 Konsequenzen für den Mathematik- und Geometrieunterricht

Die Stufe des symbolisch-anschaulichen Denkens, sowie des logischen konkreten Denkens sind für die Grundschule von hoher Bedeutung.
Diesen Entwicklungsstufen muß Aufmerksamkeit gewidmet werden, um für den Unterricht daraus zu lernen. Dabei sind die wichtigsten Kennzeichen des präoperatorischen

---

[1] ZECH, 1981, S. 219.
[2] Ebenda, S. 94.
[3] WITTMANN, 1981, S. 76.

Stadiums das Erlernen und Beherrschen der Sprache. Das Kind lernt in dieser Stufe die Dinge mit Namen zu benennen. Auch entsteht die Begriffsbildung in diesem Stadium der Entwicklung, ohne die abstraktes, also auch mathematisches Denken, nicht möglich ist. Das Lernen in diesem Alter ist in erhöhtem Maße an handelnden Umgang, das sinnliche Wahrnehmung konkreter räumlicher Objekte ermöglicht, gebunden.

# 5 PÄDAGOGISCHE ASPEKTE DES MATHEMATIK- UND GEOMETRIEUNTERRICHTS

Der Aspekt der Förderung der Selbständigkeit, als zentrale Schlüsselqualifikation von Schülern und Jugendlichen der 90er Jahre, hat sich sogar im Niedersächsischen Schulgesetz (NSchG, 27.9.1993, §2) festgesetzt: „Die Schülerinnen und Schüler sollen zunehmend selbständiger werden und lernen, ihre Fähigkeiten auch nach Beendigung der Schulzeit weiterzuentwickeln“[1] Infolge der veränderten Gesellschaft und somit veränderten Kindheit und der veränderten Vorstellung vom Lernen und Lehren sollte auch eine Veränderung der Schule einhergehen, die wiederum Unterrichtsmethoden anbieten muß, um diesem Ziel gerecht zu werden.

Wie auch schon mehrmals in den vorangegangenen Kapiteln angedeutet worden ist, kann der Sinn eines Mathematik- und Geometrieunterrichts an allgemeinbildenden Schulen nicht allein im Erwerb mathematischer bzw. geometrischer Kenntnisse oder Darlegung geometrischer Strukturen (etwa in Anlehnung an EUKLID) liegen, vielmehr müssen allgemeinbildende Aspekte die Leitschnur sein. Ein Schwerpunkt, der demnach gesetzt werden könnte, drückt sich in den Stichwörtern *Problemlösen*, *Heuristik*, *Induktion*, *Kreativität* und *entdeckendes Lernen* aus. Hier stellt sich u. a. die Frage, welche Unterrichtskonzepte diejenigen pädagogischen Aspekte beinhalten, die vor allem dem Schüler ermöglichen, sich eine „heuristische Arbeitshaltung zu eigen [zu] machen, die auf Verstehen und Entdecken angelegt ist. Genau das aber meint kreatives Verhalten, ... Denken, das ‘wirklich’ weiterführt, d. h. ‘in unmittelbarer lebendiger Auseinandersetzung mit der Sache (zu) eigene(n) Einsichten (führt)’“[2]

In diesem Abschnitt versuch ich

1. der Annahme auf den Grund zu gehen, daß das Unterrichtskonzept des entdeckenlassenden Lernens hierbei förderlich ist

---

[1] NSCHG, S. 32

[2] GLATFELD zitiert in GRAUMANN, 1994, S. 60

2. herauszufinden inwieweit das Unterrichtskonzept des entdeckenlassenden Lernens hierbei fördernden Charakter hat.

## 5.1 Entdeckendes Lernen

*„Es ist nicht nötig, in den Menschen etwas von Außen hineinzutragen*
*Man muß nur das, was in ihm liegt*
*herausschälen, entfalten, und im einzelnen aufzeigen"*
(COMENIUS)[1]

In diesem Kapitel werde ich versuchen, einen Überblick über das Unterrichtskonzept des entdeckenden Lernens zu geben. Dabei werde ich zunächst auf einige historische Ansätze zurückblicken. Anschließend werde ich mich dann mit den wesentlichen Aussagen der Theorie des entdeckenden Lernens, wie BRUNER sie sieht, beschäftigen. Geschieht dieses nur oberflächlich, so könnte man leicht zu der fälschlichen Vermutung gelangen, daß die Strategie des entdeckenden Lernens und damit die Methode des entdeckenlassenden Lehrens das Allheilmittel für die Aneignung von Wissen ist. Um eine möglichst objektive Darstellung der psychologischen Grundlagen dieser Lernstrategie zu gewährleisten, sollen gleich in dem darauffolgenden Kapitel durch die auf BRUNERs Theorie zielende Kritik von AUSUBEL, die Grenzen aufgezeigt werden. Anzumerken ist hierbei, daß beide theoretischen Konstruktionen in der Praxis nur mäßig empirisch belegt worden sind. Dadurch sind sie zwar angreifbar, bilden aber dennoch, gerade auch aufgrund ihrer kontrovers diskutierten Annahmen, eine entscheidende Grundlage für die gesamte Entwicklung der Theorie des entdeckenden Lernens und des entdeckenlassenden Lehrens.

Anhand der Ausführungen von Erich C. WITTMANN gebe ich eine kurze Zusammenfassung über die besondere Bedeutung dieser Vorgehensweise für den Mathematik- bzw. Geometrieunterricht.

[1] Zitiert nach WINTER, 1989, S.1

Auf dem Hintergrund allgemeinpädagogischer Aspekte möchte ich abschließend Konsequenzen aufzeigen, inwieweit das entdeckende Lernen grundsätzlich in den Unterricht integriert werden kann.

### 5.1.1 Vorbemerkung

Auf dem Hintergrund der Annahme, daß der Mensch *die Umwelt verstehen* muß, um seinem Bestreben, mit ihr in Einklang / ins Gleichgewicht zu kommen (Freiheit von Spannungsgefällen), gerecht zu werden und dieses nicht einfach dadurch geschieht, indem man sein Nervensystem mit den Informationen, die die Umwelt hergibt, einfach bloß 'vollaufen' läßt (wie die Formulierung einer Versuchsperson bezüglich der Qualität des Lerneffekts von Lehrfilmen lautet[1]), sondern sie - die Welt - (nochmals) in sich selbst erschafft, folgt die Notwendigkeit, mit ihr Kontakt aufzunehmen. Dieses geschieht durch Auseinandersetzung, die auch als Kommunikation betrachtet werden kann: zum einen, daß der Mensch Informationen (mit seinen Sinnen) der Umwelt aufnimmt und zum anderen, daß er ihr Informationen zukommen läßt und zwar in der Form, indem er ihr bzw. den konkreten Elementen (der Umwelt) Bedeutungen verleiht[2], was sich im Handlungsumgang ausdrückt. MATURANA/VARELA benennen diese Form der Interaktion zwischen Mensch und [Um-] Welt „Menschliches Erkennen als wirksames Handeln“[3].

NEISSER[4] nimmt an, daß der Mensch Informationen *aktiv sucht* und diese mit einem flexibel verarbeitenden kognitiven Apparat zu Erkenntnissen miteinander verknüpft[5].

---

[1] WEIDENMANN/KRAPP, 1994, S. 532

[2] Als ein Beispiel für das Vorhandensein von Kommunikation zwischen Mensch und Umwelt soll hier das Wasser dienen. Der Mensch gibt dem Wasser eine bestimmte Bedeutung - daraus ergibt sich die Art und Weise, wie er mit dem Wasser umgeht. Ist die Bedeutung eher gering, d. h. das Wasser ist ihm wenig Wert, läßt er es auch ohne Bedenken zu, es vielleicht auch zu verschwenden (unbrauchbar zu machen). Die Umwelt, der diese Information unweigerlich zukommt, baut somit als Konsequenz allmählich die Existenz der Wassergebraucher ab.

[3] MATURANA/VARELA, 1987, u. a. S. 261

[4] NEISSER, U.: Kognition und Wirklichkeit. Stuttgart: Klett-Cotta, 1979.

[5] nach WEIDENMANN/KRAPP, 1994, S. 511

Auf das Suchen folgt das Finden (auf was immer auch die Aufmerksamkeit ausgerichtet war) oder - um hier bei den schon verwendeten Begriffen zu bleiben - das Entdecken. Entdeckung bedeutet Wissenszuwachs. Wissenszuwachs bedeutet eine Veränderung der geistigen Ausgangssituation, die vor der Entdeckung herrschte. Dieses ist ein Aspekt des Lernens. Die Bedeutung des Lernens ist folglich, mit der Umwelt in Einklang zu kommen.

Da, wie in Kap. 4.1 schon ausführlicher dargestellt, das Streben nach Gleichgewicht ein urmenschliches (fundamentales) Bedürfnis sei, liegt es auch nicht fern anzunehmen, daß die Menschen schon immer lernten und darüber hinaus sich im Laufe der Geschichte mit dem Lernen an sich beschäftigten. Dabei maßen einige dem Akt der Entdeckung große Bedeutung bei.

### 5.1.2 Zum Begriff des entdeckenden Lernens

WINTER stellt fest, daß man in der Literatur auf verschiedene sprachliche Formulierungen trifft, wenn man sich mit dem Prinzip des entdeckenden Lernens beschäftigt:
„*Lernen durch gelenkte Entdeckung* [...], *Lernen als gelenkte Nacherfindung, selbstgesteuertes Lernen, produktives Lernen, problemorientiertes Lernen, Lernen in einer natürlichen Lernumgebung, spontanes Lernen, schöpferisches Lernen, induktives Lernen, Lernen nach der Beispiel-Regel-Methode, Lernen in einem offenen Curriculum, sokratisches Lernen, Lernen in Freiheit, Lernen vom Kinde aus, autonomes Lernen, Lernen im Sinne des Arbeitsschulgedankens, selbsttätiges Lernen,* usw.“[1]
Diese Vielzahl läßt erkennen, daß es keine allgemein akzeptierte Begriffsbestimmung gibt, sieht man davon ab, daß es doch ein gemeinsames Element gibt: **die Selbsttätigkeit des Schülers**.

[1] WINTER, 1984, S. 26

### 5.1.3 Historische Ansätze entdeckenlassenden Lehrens bzw. historische Betrachtung des entdeckenden Lernens

Die ersten Ansätze einer Idee entdeckenden Lernens sind schon bei PLATO (427 bis etwa 347 v.Chr.) zu finden. Dieser ‘berichtet’ in seinem fiktiven Dialog ***Menon***[1] von der wohl ersten Mathematikstunde der Menschheitsgeschichte, in der SOKRATES als Lehrer einen unwissenden Sklaven durch eng gestellte Fragen einen geometrischen Tatbestand entdecken läßt. Jean Jacques ROUSSEAU (1712-1778) läßt in seinem pädagogischen Hauptwerk ***Emile oder die Erziehung*** erkennen, daß er ebenfalls den Wert des entdeckenden Lernens schätzte. Er bringt zum Ausdruck, daß Emile nicht lernen, sondern entdecken soll.[2] Immanuel KANT (1724-1804) stellte fest, daß man Phänomene in der Wirklichkeit entdecken kann, allerdings nur die, „für die man auch Begriffe zu bilden in der Lage ist (‘Begriffe ohne Anschauung sind leer; Anschauung ohne Begriffe sind blind’)“[3].

„*Selbständigkeit durch Selbsttätigkeit*“ war der Leitgedanke Hugo GAUDIGs (1860-1923) - ein Vertreter der Bewegung, die ein von der traditionellen Buchschule hin zur Arbeitsschule zielendes Arbeitskonzept beinhaltete. Er hob "[...]die Bedeutung der *Frageaktivität* der Schüler als Grundlage von Erkenntnis und Weisheit hervor, den Frage*trieb* als Form des Wissenstriebs und die Frage als Denkmodus"[4]

Friedrich COPEI prägte in seinem gleichnamigen Werk den Begriff des ***fruchtbaren Moments im Bildungsprozeß*** (1930) als Ergebnis forschenden, suchenden und selektiven Umgehens mit Problemen. Nach seiner Auffassung hat der Lehrer Situationen zu schaffen, die an die Primärerfahrungen des Schülers anknüpft und in denen er dann zur Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand angestoßen bzw. vorbereitet wird. Bei der Begriffsbildung kommt es COPEI dabei an, daß der Schüler nicht bloß einem Vormachen denkend und beobachtend folgt (*Hinterherdenken*), sondern um die jeweiligen Probleme selbst angehen zu können, sich selbst eine aktive Arbeitshaltung aneignet, die hauptsächlich durch gezieltes (Sich-) Fragen charakterisiert ist, bei der er durch dem

[1] WINTER, 1989, S. 8ff

[2] Nach REIP, 1979, S. 193. Vgl. auch bei SCHWARTZE/FRICKE, 1983, S. 165

[3] JANK/MEYER, 1994, S.29

[4] OTT, 1979, S. 166

sog. *Nachdenken* von einer Frage aus zur nächsten Antwort gelangt - und sei es auch aufgrund einer konkret gestellten Frage an den Lehrer durch dessen Antwort.[1]

Bei der Weiterentwicklung der reformpädagogischen Ideen nach dem Zweiten Weltkrieg tat sich besonders Heinrich ROTH mit seiner pädagogischen Psychologie des Lehrens und Lernens (1957) hervor. Er erkannte die Notwendigkeit, eine solche Beziehung zwischen Lerner und Umwelt herzustellen, in der sie *miteinander ins Gespräch kommen*.[2] Dafür sei es allerdings notwendig, das *Kulturgut* nicht in seiner Komplexität dem Lernenden anzubieten, sondern es wieder in seinen Werdensprozeß aufzulösen (*Moment der Ursprünglichkeit*). In dieser **originalen Begegnung**, in der erst, laut ROTH[3], auch das Kind seine natürlichen Fragen entdecke, könne der Lerngegenstand aus seinem ursprünglichem Gestaltungsakt heraus erschlossen werden. Dieser Vollzug eines Hervorbringungs- bzw. Gestaltungsprozesses sei nach ROTH[4] die Voraussetzung, um den Lernenden zu befähigen, die *Kultur* zu verstehen, fortzusetzen und kritisch zu bewerten.

AEBLI forderte ähnlich wie schon COPEI, der dem Lernenden im Lernprozeß empfahl, keine Mühe zu verkürzen, die **selbständige kognitive Aktivität des Lernenden**, um den Gesamtaufbau eines Gedankenkomplexes erfassen zu können. Die Forschungsaktivität des Lernenden ließe erst die Entstehung eines Problembewußtseins zu, welches notwendig ist für einen systematischen und ganzheitlichen Aufbau kognitiver Strukturen. Denn nach AEBLIs Auffassung wird das Suchen durch das im Denken lebendig gewordene Problem geleitet, das u. a. die „Bedingung selbständiger Integration von Wissenselementen in die individuelle kognitive Struktur des Lernenden“[5] sei.

---

[1] OTT, 1979, S. 166

[2] Vgl. ROTH, 1966, S. 116

[3] Vgl. Ebenda, S. 111

[4] Vgl. Ebenda, S. 117

[5] OTT, 1979, S. 167

### 5.1.4 Theorien entdeckenden Lernens

Hier soll der Konzeption von Bruner erhöhte Aufmerksamkeit geboten werden, da seine Ausführungen maßgeblichen Anteil an der geamten Situation der Theorien des entdeckenden Lernens besitzen. Um Grenzen dieser Theorie aufzuzeigen, soll hier auf Ausubel und dessen Kritik an Bruners Modell eigegangen werden. Anzumerken ist in diesem Zusammenhang, daß weder Bruner noch Ausubel ihre Konzeptionen selber in der Praxis umfangreich belegt haben.[1]

#### 5.1.4.1 Jerome S. BRUNERs Modell entdeckenlassenden Lehrens

BRUNER geht davon aus, daß die jeweils individuelle geistige Vortrefflichkeit den einzelnen Menschen ausmacht. Dieses beruht darauf, „daß sein allerpersönlichstes Wissen jenes ist, das er selbst entdeckt hat“[2]. Und das sei auch der Grund, daß zwischen dem Wissensbesitz und dem Besitzer ein besonderer und außergewöhnlicher Bezug entsteht, sofern er sich diesen durch eigene Entdeckung zu eigen gemacht hat: BRUNER bemerkt, daß man immer wieder in vielen Wissenschaften „auf einen gefühlsmäßigen Glauben an die starken Wirkungen [stößt], die davon ausgehen sollen, daß man dem Schüler gestattet, die Dinge selbst zusammenzustellen, sein eigener Entdecker zu sein“[3].

Unter Entdeckung versteht BRUNER fast alle Formen des Wissenserwerbs, die die Hilfe des eigenen Verstandes benötigen. Er unterscheidet allerdings das kognitive Verhalten von Individuen, das in solchen Situationen lernt, in denen Informationen zur Verfügung stehen, in zwei Extreme:

1. Die „zufällig beiläufige Informationsaufnahme mit zunehmender Informationsanhäufung nicht verbundener, das Gedächtnis belastender Fakten (episodic empiricism)“[4].

---

[1] Vgl. NEBER, 1981, S. 13

[2] BRUNER in NEBER, 1981, S. 15f

[3] Ebenda, S. 16

[4] RIEDEL, 1973, S. 19

2. Die „nach Zusammenhängen suchende, in der Prüfung von Hypothesen fortschreitende und dabei Irrelevantes ausschließende Konzentration auf das noch Unbekannte (cumulative constructionism)“[1].

Dem wohlvorbereiteten Verstand mißt BRUNER allerdings die günstigere Ausgangssituation für Entdeckungen wie auch Überraschungen bei. Es reicht nicht aus, den Lerngegenstand einfach nur anzubieten. Der ‘Blick’ des Lernenden muß auf bestimmte Probleme gelenkt werden bzw. der Lerner muß sehr wohl schon gewisse Vorkenntnisse besitzen. Denn ein Schüler, der z. B. vorher noch niemals ‘Dreiecke’ miteinander verglichen (und geordnet und/oder sortiert) hat, kann auch nicht die Besonderheit eines gleichseitigen ‘Dreiecks’ entdecken, würde man ihm dieses als aller erstes und alleine Vorzeigen. BRUNER geht nämlich davon aus, daß „Entdeckung ihrem Wesen nach ein Fall des Neuordnens oder Transfomierens des Gegebenen ist“[2]. D. h. Teile gegebenen Wissens werden zu weiteren neuen Erkenntnissen zusammengefügt (wobei dieser Prozeß nicht unbedingt blockiert wird, wenn man ergänzende Informationen zuführt). Nach OTT[3] umgreift entdeckendes Lernen die Lernzielebenen des Reproduzierens, Reorganisierens sowie des lateralen und vertikalen Transfers.

BRUNER legt in seinen Ausführungen dar, daß gewisse äußere Bedingungen (u. a. pädagogische Prinzipien) die Kinder eher dazu bringen, ihre eigenen Entdecker zu sein.

Wie selbstverständlich klingt die Forderung BRUNERs, das Ziel des Lernens muß sein, daß der Schüler ein fundamentiertes Verständnis des Gegenstandes erfährt. Aber dabei beläßt BRUNER es nicht, sondern sieht die Chance der Schule darin, aus dem Schüler einen *spontanen und selbständigen Denker* machen zu können, der sich selber verhilft auch nach der Schulzeit alleine weiterzukommen. Diese Forderung deckt sich mit einem Ziel des Bildungsauftrages der Schule, das im niedersächsischen Schulgesetz, §2, verankert worden ist: “Die Schülerinnen und Schüler sollen zunehmend selbständiger wer-

---

[1] Ebenda.

[2] BRUNER in NEBER, 1981, S. 16

[3] 1979, S. 168

den und lernen, ihre Fähigkeiten auch nach Beendigung der Schulzeit weiterzuentwickeln.“[1]

OTT[2] interpretiert BRUNER in der Weise, daß diese Zielsetzung jedoch verlangt, daß der Schüler entsprechende Handlungsschemata erlernen und einüben muß, die er dann später ‘benutzen’ soll. Der Schüler soll demnach also „nicht nur Bedeutungen lernen (Konzepte, Prinzipien)“, sondern vor allem „Problemlösungsstrategien, das Entdecken mit seinen kognitiven, affektiven und psychomotorischen Voraussetzungen“[3].
Bei einer konstruktiven Auseinandersetzung mit Lerngegenständen (mit der Umwelt) sollen neben den Entdeckungen von Ordnungen und Beziehungen, ebenso eine Lernarbeit organisiert werden, die sich auf die Verwendungszwecke von Informationen bezieht.
Als Ergebnis seiner Untersuchungen verbindet BRUNER mit der Lernstrategie des entdeckenden Lernens vier Erwartungen:

(1) Einen „Zuwachs an intellektueller Potenz“,
(2) den „Übergang von extrinsischer zu intrinsischer Belohnung“,
(3) „das Erlernen der heuristischen Methoden des Entdeckens“ und
(4) „Hilfe für die Verarbeitung im Gedächtnis“[4]

<u>Zu (1):</u>
Wie eben oben schon erwähnt, soll die Methode oder das Lehrverfahren des Entdeckens sich laut BRUNER[5] nicht auf Ordnungen und Beziehungen beschränken, sondern vielmehr auch das Lernen lehren. Hierzu gilt es Handlungsschemata bzw. Problemlösungstechniken zu erlernen, die es dem Schüler ermöglichen selbständig Probleme zu lösen, wobei Informationen bezüglich des Lernens effektiv verarbeitet werden sollen. Der

[1] NSchG, S. 5
[2] 1979, S. 168
[3] Nach OTT, 1979, S. 168
[4] BRUNER zitiert nach NEBER, 1981, S. 17
[5] Ebenda, S. 20f

Schüler entwickelt sich quasi zum Konstrukteur für das Lösen von Problemen, weil er Informationen zu neuen Einsichten transformiert.

Zu (2):

BRUNER[1] behauptet, daß eine effektive kognitive Aktivität nur dann möglich ist, wenn der Lerner selbst dafür motiviert ist, dieses auch tun zu wollen. Entscheidend ist hierbei die Tatsache, daß die Lerner von einer unmittelbaren Reizkontrolle befreit werden müssen. Denn gerade dann, wenn das Lernen davon geleitet wird, Bestrafung zu vermeiden bzw. Belohnung zu erhalten, wird ein Handlungsschema erlernt, das dazu dient sich den Kriterien der Lehrer oder der Eltern anzupassen. Damit der Lernen jedoch veranlaßt wird, eigenständige Lösungsstrategien zu entwickeln, muß ihm die Möglichkeit geboten werden, aus selbständigem Bearbeiten von Material heraus, Erfolgserlebnisse zu sammeln. Erfolg und Mißerfolg werden dann nur noch als Informationen für ‘ich bin auf dem richtigen Weg’ bzw. ‘... auf dem falschen Weg’ betrachtet. Um aber von sich aus motiviert zu sein, muß dem Lerner ermöglicht werden, das Problem, das der Lerngegenstand bietet, anzunehmen und vor allem sich zu eigen machen zu können. Daraus ergibt sich, daß extrinsische Bewertung an Bedeutung verliert und das *Erlebnis von eigener Kompetenz*, das sich u. a. auch in der Kontrollierbarkeit der Umwelt ausdrückt, in den Vordergrund rückt.

Zu (3):

Die heuristische Methode des Entdeckens erlernt man, indem man, so BRUNER[2], ganz einfach das Problemlösen übt, und sich dabei um Entdeckung bemüht. Das Erlernen heuristischer Lernverfahren, insbesondere des Erlernens des Fragens, ist auf die hypothetische Methode angewiesen. Unabhängig davon, ob die *herausholend-erörternde* oder die *anreizend-aufgebende* Lehrform als Trainingsverfahren effektiver ist, das Erlernen von Fragetechniken an sich ist dabei von entscheidender Größe. Denn wird ein Lerner erst befähigt, aus einem Gedankenkomplex heraus Fragen stellen zu können, so wird

[1] Ebenda, S. 21ff

2 nach OTT, 1979, S. 169f.

er die Informationen nicht als *statischen Besitz* erfahren, „sondern als Potentiale zur selbständigen Lösung neuer Probleme“[1].

Zu (4):

Das entdeckende Lernverfahren bietet dem Lerner auch hier wieder durch die Eigenaktivität des Lerners Vorteile bei der Abrufbarkeit abgespeichertem Wissen. Denn das Abrufen stellt für den Wissensbesitzer das eigentliche Problem dar. BRUNER stell fest, daß der Mensch offensichtlich imstande ist, Unmengen an Informationen aufzunehmen. Um über diese Informationen dann allerdings auch verfügen zu können, müssen sie oder Teile von ihnen abrufbar sein. Am schnellsten ist solches Material zugänglich, das nach denselben Einstellungen und Aktivitäten, die das Herausfinden oder Entdecken von Tatbeständen charakterisieren, in kognitive Strukturen eingegliedert worden ist.[2]

#### 5.1.4.2 David P. AUSUBELs Kritik an BRUNERs Konzeption

Laut NEBER[3] gilt AUSUBEL als ein scharfer Kritiker der Theorie des entdeckenden Lernens. Grundsätzlich ist AUSUBEL wohl von der Wirksamkeit dieser Methode überzeugt, grenzt deren Bedeutungsbereich jedoch ein. AUSUBEL betrachtet das Leben nämlich eher als eine „komplizierte Verbindung von Instruktionen und Entdeckungen“[4]. Um, wie unter 5.1 schon angekündigt, einige Grenzen dieser Lernstrategie aufzuzeigen, möchte ich hier lediglich die Kernthesen AUSUBELs zusammengefaßt wiedergeben.

Für die Entdeckungsmethode erkennt er einige Vorzüge an, wie z. B. die Tatsache, daß die *Bedeutungshaltigkeit von Material* für den Lernenden erhöht werden kann, wenn dieser sich in den ersten einfachen Lernstadien eines abstrakten Stoffes befindet. Da-

[1] Ebenda.

[2] BRUNER in NEBER, 1981, S. 27f.

[3] 1981, S. 13.

[4] Nach OTT, 1979, S. 171.

durch sei nämlich auch „der gelegentliche Gebrauch induktiver Entdeckungstechniken zum Lehren von Stoffinhalten [...] didaktisch gerechtfertigt, wenn die Schüler sich im *konkreten* operationalen Stadium kognitiver Entwicklung befänden“[1]. Hierbei beachtet AUSUBEL offensichtlich die Erkenntnisse PIAGETs, auch dabei, wenn er BRUNER zustimmt, daß konkret-empirische Erfahrungen erforderlich seien, „um das für diese Stufe kognitiver Entwicklung charakteristische halb-abstrakte oder intuitive (unmittelbar sinnverstehende) Niveau der Bedeutungshaltigkeit zu erzeugen“[2].

Einen anderen tatsächlichen Vorteil sieht AUSUBEL in der Annahme BRUNERs, die Entdeckungsmethode sei wohl das beste Mittel, „um effektive Fertigkeiten im Hypothesenaufstellen und -testen zu entwickeln und wünschenswerte *Einstellungen zu erzeugen* gegenüber Lernen und Nachforschung, gegenüber Mutmaßungen und Ahnungen, gegenüber der Möglichkeit, Probleme selbständig zu lösen und Einstellungen über die letztliche Regelmäßigkeit der Natur und die Überzeugung, daß Regelmäßigkeiten entdeckt werden können“[3]. Für die didaktische Vermittlung von Problemlösungstechniken und wissenschaftlicher Methode sei demnach die Entdeckungsmethode nützlich.

Um der Frage nachzugehen, ob die Entdeckungsmethode eine empfehlenswerte Technik sei, möchte ich zunächst die von AUSUBEL kritisch aufgenommenen zwölf nach seiner Meinung unhaltbaren Thesen der Befürworter aufzeigen. Anschließend betrachte ich es angesichts des Rahmens meiner Arbeit als ausreichend, die wesentlichen Gegenargumente AUSUBELs in einer Zusammenfassung grob aufzuzeigen.

1. „Alles wirkliche Wissen sei selbstentdeckt;
2. Bedeutung sei ein ausschließliches Produkt kreativer, nichtverbaler Entdeckung;
3. subverbale Bewußtheit sei der Schlüssel zu Transfer;
4. die Entdeckungsmethode sei die Hauptmethode, um Stoffinhalte zu vermitteln;
5. Problemlösungsfähigkeit sei das primäre Erziehungsziel;
6. Training in der Heuristik der Entdeckung sei wichtiger als ein Training in einem Stoffgebiet;

[1] Ebenda.

[2] Ebenda.

[3] Ebenda, S. 172.

7. jedes Kind sollte ein kreativer und kritischer Denker sein;
8. Expositionsunterricht sei autoritär;
9. Entdeckung organisiere das Lernen effektiv für späteren Gebrauch;
10. Entdeckung sei ein einzigartiger Erzeuger von Motivation und Selbstvertrauen;
11. Entdeckung sei die erste Quelle innerlicher Motivation, und letztlich:
12. Entdeckung sichere ‘Erhaltung des Gedächtnisses’.“[1]

Für AUSUBEL ist es überhaupt nicht notwendig, sich alles Wissen durch selbständige Entdeckungen anzueignen; allein schon vom zeitlichen Aufwand her sei dieses Vorhaben nahezu unmöglich. Unmengen an Wissen seien schon von anderen entdeckt, verbalisiert und mitgeteilt worden, und gerade das sei auch eine höhere Fähigkeit der menschlichen Intelligenz, durch rezeptives Lernen Einsichten zu gewinnen. Ab dem Zeitpunkt, in dem die Schüler nämlich das abstrakte Stadium kognitiver Entwicklung erreicht haben, ist die verbale Expositionsmethode weitaus sinnvoller und zeitsparender. Um einen vorgelegten sinnvollen Stoff zu einem sinnvollem Wissen werden zu lassen ist es nach AUSUBEL[2] völlig gleichgültig, ob es sich dabei um rezeptives oder um entdeckendes Lernen handelt.

Grundlegend unterscheiden sich BRUNER und AUSUBEL in ihrer Auffassung bezüglich des Hauptzieles der Ausbildung des Lerners (wobei nicht näher auf die Institution eingegangen wird, an die sie ihre jeweiligen Forderungen stellen). Während für BRUNER der Erwerb einer allgemeinen Fähigkeit für die Kommunikation mit der Umwelt im Vordergrund steht und für AUSUBEL[3] der systematische Erwerb von Wissen. Für Grundschüler ist es aufgrund ihrer Entwicklungsstufe wichtig, konkret empirische Erfahrungen zu sammeln, auf denen sich Bedeutungsinhalte stützen können. Das rezeptive Lernen stellt aber nach der Grundschule die effektivste Methode dar, den wesentlichen Inhalt einer Disziplin zu assimilieren.[4] Das Erlernen von Problemlösetechniken, das mitunter zeitraubend ist, würde das kognitiv reife Individuum nicht ständig motivieren

---

[1] Ebenda.

[2] AUSUBEL/NOVAK/HANESIAN in NEBER, 1981, S. 32

[3] Nach OTT, 1979, S. 174

[4] Vgl. AUSUBEL/NOVAK/HANESIAN in NEBER, 1981, S. 34

können, sobald die ersten einfachen Lernstadien eines abstrakten Stoffes bewältigt sind.[1] AUSUBEL geht in seinen Ausführungen sogar noch einen Schritt weiter und fragt, ob es nicht vielleicht viel wichtiger sei, primär die rezeptive Lernfähigkeit zu erlernen und erst bei Schwierigkeiten des Lerners zu sehen inwieweit ein entdeckendes problemlösendes Vorgehen weiterhelfen kann.

#### 5.1.4.3 Schlußfolgerungen

In der Argumentationsstrategie von AUSUBEL und seinen Mitarbeitern spielt der *Zeitfaktor* immer wieder eine tragende Rolle. AUSUBEL stimmt BRUNER zu, wenn dieser behauptet, Bedeutungsinhalte würden sich auf konkret-empirischen Erfahrungen stützen, was für Grundschüler ein entscheidender Aspekt zu sein scheint und durch PIAGETs Erkenntnisse substantiiert wird. Doch um einen Lerngegenstand heuristisch anzugehen braucht es Zeit, vor allem dann wenn ein Operieren an konkretem Material notwendig ist. Auf der Stufe einfacher Lehrstadien abstrakter Stoffe mag es vielleicht noch von Vorteil sein, nicht aber, wenn man sich den gesamten Inhalt einer Disziplin nach fachwissenschaftlichen Gesichtspunkten zu eigen machen will. Nach AUSUBEL kann hier das rezeptive Lernen als weitaus effektivere Methode angesehen werden. Und es ist auch falsch, so AUSUBEL, zu behaupten, daß nur durch die Entdeckungsmethode ein tiefgreifendes Verständnis von Begriffen und ähnlichem ermöglicht werden könne. Das meiste des gesamten wirklichen Wissens der Menschheit ist weitergegeben worden - von anderen entdeckt und verbal übermittelt worden. Denn das ist nämlich auch gerade das charakteristischste Merkmal menschlicher Kultur, daß Wissen von Generation zu Generation übermittelt (und vor allem erweitert) werden kann und nicht immer wieder aufs Neue entdeckt werden muß.

[1] Vgl. OTT, 1979, S. 174

### 5.1.5 Aktiv-entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht nach Erich Ch. WITTMANN und Gerhard N. MÜLLER

Die Vorschläge von WITTMANN/MÜLLER[1] orientieren sich an einer ganzheitlichen Darstellung des Unterrichtsstoffes und sprechen sich gegen das Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte aus. Auf diesem Wege versuchen sie einer Parzellierung und Segmentierung des Unterrichtsstoffes entgegenzutreten. Denn bei Problemstellungen, die ein Lernen in Sinnzusammenhängen ermöglichen, erarbeiten sich die Schüler nach individuellen Voraussetzungen bestimmte Fertigkeiten, Wissenselemente und Lösungsstrategien. Von großer Bedeutung sind hierbei gezielt eingesetzte Veranschaulichungen, die zum einen den mathematischen Gegenstand zur Darstellung bringen und zum anderen den Schülern ein eigenständiges und aktives Arbeiten mit ihnen ermöglicht. Dabei kommt dem Lehrer die Aufgabe zu, die Schüler anzuregen und auf bestimmte Ziele hinzulenken ohne bestimmte Musterlösungen vorzuschreiben.

### 5.1.6 Konsequenzen für die Unterrichtspraxis

Damit das Kind sich zunehmend auf selbständige Weise in seiner Umwelt zurecht findet, muß auch die Schule ihren Beitrag dazu leisten. Das Selbsttätigsein der Schüler ist eine Forderung, die dem dynamischen Prinzip (früher Aktivitätsprinzip genannt) zugrunde liegt. Ebenso wird darin auch die unmittelbare Auseinandersetzung mit der Wirklichkeit (statt verbaler Vermittlung) verlangt. Diese Forderungen lassen sich laut SCHWARTZE/FRICKE nur durch problemorientierten Unterricht erfüllen.[2]

Die Schule muß dem Schüler entsprechende Situationen anbieten Hierzu eignet sich laut KNOCH in besonderer Weise die Methode des entdeckenden Lernens. Sie ist seiner Meinung nach „eine Lernform, die die Trennung von Schule und Lebenswelt vielfach aufhebt. Es weist eine formale Grundstruktur auf, die sich als eine Folge von Operationen beschreiben läßt:

[1] 1992, S. 162.

[2] SCHWARTZE/FRICKE, 1983, S. 165. Vgl. ebenso bei REIP, 1979, 193f.

- Gedanklicher Konflikt
- Hypothese
- Lösunsstrategie/Problemlösung
- Darstellung der Ergebnisse
- Übertragen auf neue Problemsituationen.“ [1]

„Die reine Entdeckungsstrategie, das Problemlösen ohne prozeßorientierte Lernhilfen, stellt die Hochform menschlichen Denkverhaltens dar; sie kann nicht unmittelbar angegangen werden, sondern nur im Sinne eines gestuften, systematisch aufbauenden Lernens, wie u. a. Robert M. GAGNÉ aufgezeigt hat.“[2] Dabei kommt dem angeeigneten Wissen nach BRUNER eine instrumentelle Funktion zu, die dazu dient, um wiederum zu neuem Wissen zu gelangen.

Wenn davon ausgegeangen wird, daß selbstgesteuertes Lernen einen positiven Einfluß auf das Selbstkonzept und die Kreativität des Kindes hat und dieses auch angestrebt werden soll, dann muß in schulischen Lernsituationen dafür gesorgt werden, daß auf die individuellen Lerntypen eingegangen werden kann. Denn in dem Unterricht eines demokratischen Schulsystes muß nach VESTER[3] eine Entfaltung des auditiven, des optisch-visuellen, des haptischen, des intellektuellen Lerntyps ermöglicht werden.

[1] Nach NEFF, 1993, S. 13.

[2] Nach OTT, 1979, S. 184.

[3] Nach NEFF, 1993, S. 14.

*„The beauty of origami is*
*that the folder leaps from the second dimension into the third,*
*uppon executing the first crease*.“
(Barbara PEARL[1])

# 6 PAPIERFALTEN

In erster Linie sollen solche Papierfalttätigkeiten einbezogen werden, die ohne Schere und Klebstoff auskommen. Dennoch soll auch auf diese Hilfsmittel nicht verzichtet werden, da sie einerseits die Möglichkeiten des Herstellens von Papierfaltprodukten, also der Anwendung der erlernten Fertigkeiten und Wissen, um ein Vielfaches erweitern und andererseits bei Faltschnitten, wie der Begriff schon andeutet, auf das Schneiden wohl kaum verzichtet werden kann, wenn man nicht ausschließlich Kopfgeometrie dabei leisten will.

## 6.1 Versuch einer Begriffsbestimmung

Anzumerken ist, daß unter Papierfalten nicht etwa unkontrolliertes Faltenschlagen in ein Stück Papier oder gar das Zerknüllen von Papier verstanden wird, sondern solche Papierfalttätigkeiten, wobei der einzelne Faltvorgang an sich immer um eine beliebig lange, gerade Linie vollzogen wird, die von einem Papierrand bis zu einem anderen verläuft.

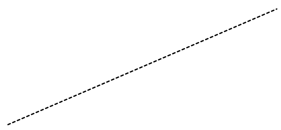
[1] „Math in Motion : Origami in the Classroom“, 1994.

### 6.1.1 Origami Axiome nach Humiaki Huzita[1]

Papierfalten kann sehr komplexe Formen entstehen lassen. Es gibt eine Menge an komplizierten Papierfaltvorgänge und -folgen, die letzten Endes sich in sechs grundlegenden Prinzipien ausdrücken lassen. Diese Sätze sind die Axiome des Papierfaltens:

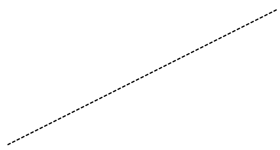
<u>O1</u>

Sind zwei Punkte **p1** und **p2** gegeben, so kann man eine Linie falten, die sie miteinander verbindet.



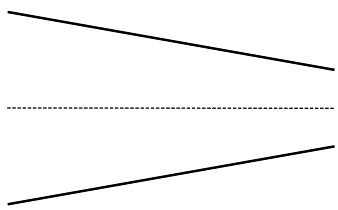
<u>O2</u>

Sind zwei Punkte **p1** und **p2** gegeben, so kann man **p1** auf **p2** falten.



<u>O3</u>

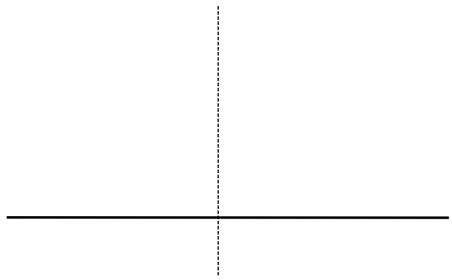
Sind zwei Linien **l1** und **l2** gegeben, so kann man l1 auf l2 falten.



[1] 1992, S. 40ff

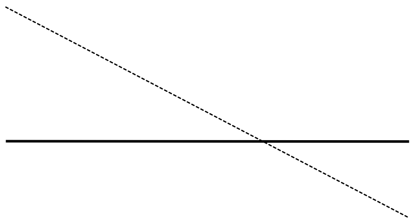
O4

Ist ein Punkt **p1** und eine Linie **l1** gegeben, so kann man eine Faltlinie herstellen, die senkrecht zu **l1** und gleichzeitig durch **p1** verläuft.



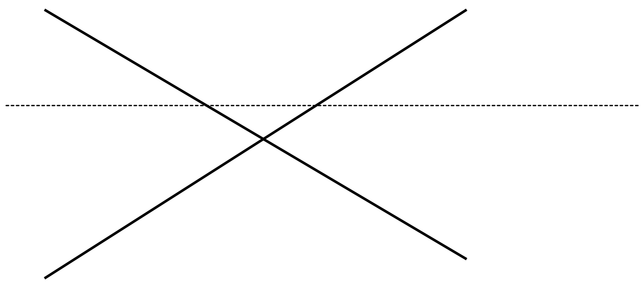
O5

Sind zwei Punkte **p1** und **p2** und eine Linie **l1** gegeben, so kann man eine Faltlinie herstellen, die **p1** auf **l1** plaziert und gleichzeitig durch **p2** verläuft.



O6

Sind zwei Punkte **p1** und **p2**, sowie zwei Linien **l1** und **l2** gegeben, so kann man eine Faltlinie herstellen, die **p1** auf **l1** und **p2** auf **l2** plaziert.



## 6.2 Geschichte des Papierfaltens

René Lucio und Jan Spütz[1] vermuten, daß schon weit vor der Erfindung des Papiers gefaltet wurde. Einige Überlieferungen stammen aus Byzanz und dem alten Ägypten; dort sollen schon Gewebe und Stoffe in allen Qualitäten und für verschiedene Verwendungszwecke gefaltet worden sein.

Mit der Erfindung des Papiers durch die Chinesen Ende des ersten Jahrhunderts begann wahrscheinlich auch sogleich die Beschäftigung mit dem Falten von Papier. Aufgrund der vielen Vorteile dieser ‘weißen Pracht’ (einfache und günstige Herstellung, leichte Handhabung usw.) verbreitete sich nicht nur das Material selbst, sondern mit ihm auch einige Formen der Faltungen. Am japanischen Kaiserhof hat sich **Origami**, die Kunst des Papierfaltens (*ori* = falten, *kami* = Papier, das sich zu *gami* wandelt, wenn man es mit *ori* kombiniert), aus einem einfachen spielerischen Zeitvertreib heraus entwickelt, der vornehmlich von kleinen Mädchen betrieben wurde. Da unter den überlieferten Figuren aus dieser Zeit eine Figur in der Form einer chinesische Dschunke dabei ist - Japaner bevorzugen keine Dschunken! - muß man annehmen, daß, wie eben schon angedeutet, auch den Chinesen die Kunst des Papierfaltens zur damaligen Zeit, wenn nicht sogar schon vor dem Import des Papiers in Japan, bekannt war.

Die ältesten Figuren sind nicht etwa realen Dingen nachempfunden, wie etwa Pflanzen, Tieren oder Gegenständen, sondern sind vielmehr einfach nur schöne abstrakte Figuren, die der Phantasie und vor allem des Probierens entsprungen sind. Solche sogenannten *‘Noshis’* wurden an Mitmenschen verschenkt, in der Hoffnung, daß sie ihnen Glück bringen würden. Aber auch bei anderen zeremoniellen Anlässen, wie z. B. bei Bestattungen wurden den Toten Papierfaltobjekte mit symbolischen Bedeutungen mit ins Grab gegeben. In der traditionellen Form besteht Origami in der Erzeugung von Figuren aus einem quadratischen Stück Papier ohne Schneiden und Kleben. Die traditionellen Figuren sind von eher einfacher Konstruktion; was wohl daran liegt, daß die Anleitungen zur Herstellung der Figuren von den Müttern mündlich an ihre Töchter übergeben worden sind bzw. sie in Kinderbüchern beschrieben worden sind. Das Faszinierende für einige der Origami-

[1] Lucio/Spütz, 1997, S.10

sten ist die ständige Suche nach neuen Figuren; wobei nicht die Suche nach einem vorher bestimmten Produkt im Vordergrund steht, sondern das ziellose Probieren mit Hilfe der Grundfaltetechniken und letztendlich das Entdecken einer gefälligen Figur.

Aufgrund der weiter oben genannten Vorzüge dieses Materials konnte sich das Papierfalten nicht nur im asiatischen Raum weit verbreiten. Seit dem Ende des Zweiten Weltkrieges besteht mittlerweile weltweit ein Interesse an Origami. Einerseits liegen die Ursachen dafür im Nutzen für alltägliche Probleme (z. B. das Herstellen kleiner Schachteln, Tüten, Briefumschläge, usw.) und andererseits in spielerischen und gestalterischen Basteleien (Sterne, Flugzeuge, usw.). Wenn man einen Blick in das Internet wirft und pauschal irgendeine der Suchmaschinen Dokumente bezüglich des Begriffs ‘Origami’ suchen läßt, so erhält man Zugang zu Origami-Clubs auf sämtlichen Kontinenten der Erde. Sie geben wiederum weitere hinweise auf eine Vielzahl von Interessengemeinschaften, die sich mit allen nur möglichen Formen des Papierfaltens beschäftigen.

Aber nicht nur die meist komplizierten Kniffe und Faltideen der Origami-Künstler sollen hier erwähnt werden, sondern gerade in Bezug auf diese Arbeit auch die elementarsten und leicht erweiterten Falttätigkeiten und Entfalttätigkeiten[1], die der Entwicklungsstufe der Grundschüler als angemessen erscheinen.

In diesem Kapitel soll zunächst eingegrenzt werden, was für diese Arbeit überhaupt an Papierfaltungen in Betracht kommt. Danach werde ich verschiedene Materialien und Falttechniken vorstellen. Abschließend möchte ich an einigen Beispielen zeigen, was durch bzw. mit dem Falten von Papier herzustellen ist.

[1] Hier ist nicht z. B. die persönliche Entfaltung eines der beteiligten Personen (Lehrer, Schüler) gemeint, obwohl dieses bei gewisser Problemstellung durchaus möglich sein könnte, sondern das tatsächliche Entfalten von schon vorher gefalteten Objekten, wie z. B. Schachteln, Verpackungen usw.

## 6.3 Grundlagen der Papierfaltkunst

Von anerkannten Origamisten wie von Geometrielehrern wird empfohlen, daß es für den Anfänger von großer Wichtigkeit ist, das ‘richtige Falten’ des Papiers von der Pieke auf zu erlernen und nicht durch das Falten irgendeiner schönen Figur einzusteigen. Denn James Minoru SAKODA[1] hat die Erfahrung gemacht, daß man nur dann die Schönheit der Figuren und die Regelmäßigkeiten beim Papierfalten entdecken könne, wenn man ‘richtige Knicke’ machen kann und, aufgrund der z. T. schwer zu verstehenden Faltanleitungen, die Fachbegriffe erlernt hat. Diese Voraussetzungen würden den faltenden Anfänger überhaupt erst zum Dabeibleiben motivieren.

### 6.3.1 Materialien zum Papierfalten

Für das Falten im allgemeinen Sinn stehen viele Materialien zur Verfügung. Während bei Origami hauptsächlich quadratisches, mindestens zweifarbiges, 15 x 15cm großes Papier verwendet wird, soll hier angemerkt werden, daß allerhand Variationen bezüglich des Materials existieren. Neben den verschiedenen Größenformaten des Papiers gibt es noch Möglichkeiten in der Verwendung verschiedener Papierstärken und -arten. Für die Verwendung dünnen Papiers eignet sich z. B. Zeitungs- oder Seidenpapier; benötigt man steiferes, härteres Papier als das übliche Schreibpapier, so verwendet man Backpapier; für dickeres, z. B. Tonpapier. Soll der Karton noch stärker sein, so wird das Problem zunehmend der ‘Knick’ an der Faltlinien sein. Denn diese halten ab einer bestimmten Kartonstärke den Biegungen um $180^{o}$ - so fern sie denn gelingen - nicht mehr stand und reißen. Hier müssen die Faltlinien vorher mit einem Messer leicht eingeritzt werden.

Unter den Begriff des Papierfaltens fällt aber auch die Verwendung anderen Materials, das mitunter interessante Variationen und vor allem aber auch nützliche Möglichkeiten bietet. Hierzu gehört z. B. das Falten von Plastik- bzw. Kunststoffolie, die sich beson-

[1] 1984, S. 9f

ders zum Herstellen von achsensymmetrischen, ebenen Figuren eignet.

Nicht näher betrachtet werden müssen die Möglichkeiten des Faltens von zerknittertem, zerknülltem, farbigem, groben und feinem Papier (wobei der darin enthaltene ästhetische Aspekt sicherlich auch eine große Rolle spielen kann), sowie des Faltens von Aluminiumfolie und sogar von Metall (das verständlicher Weise spezielle Werkzeuge benötigt).

Dennoch kann man nicht vollständig auf sogenannte Hilfswerkzeuge verzichten. Einerseits benötigt man zum Papierfalten nämlich immer eine feste Unterlage (z. B. eine Tischplatte) und andererseits hilft ein Falzbein, um aus einem Faltkniff (siehe unten) einen geraden und scharfen Knick machen zu können. An Stelle eines Falzbeines könnte man auch die Fingernägel benutzen, sofern diese vorhanden und von gewisser Härte sind (Grundschüler!), oder man gebraucht ein Lineal oder eine Schere. Bei letzterer ist es auch wichtig herauszufinden, daß sich sowohl der Rücken vom Obermesser als auch die Griffe in unterschiedlicher Weise eignen: Der Rücken vom Obermesser kann zwar einen viel schärferen Knick als die Griffe herstellen, allerdings wird es immer schwieriger, das Papier zu halten je tüchtiger man mit dem Rücken drückt und am Faltkniff entlang streicht und es kann sogar passieren, daß es einreißt. Hier gilt es herauszufinden, womit es wie am besten ‘geht’.

### 6.3.2 Faltanleitungen

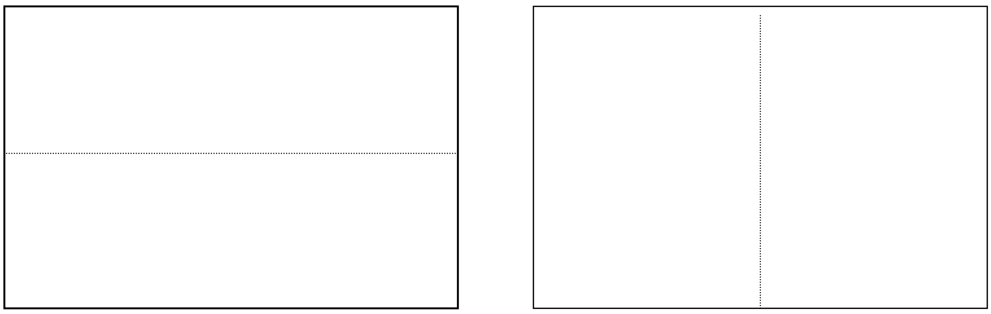
Um **Faltanleitungen für Figuren** weitergeben zu können begnügt man sich vierer Medien: Fotografie, Abbildung (Zeichnung), Symbolen und Text. Es ist sinnvoll zunächst zu erlernen, was entsprechende Anleitungen verlangen. Während schon Grundschüler mit der Interpretation von Fotografien und Zeichnungen von Figuren Übung haben, dürften aber selbst erwachsene Anfänger nicht wissen, was z. B. mit *Buchfalten* oder *Falten eines kleinen Briefes* gemeint ist, wenn eine schriftliche Anweisung dieses verlangt.

### 6.3.3 Einige Techniken und Grundformen des Papierfaltens

Der *Faltvorgang* beschreibt das einfache Umklappen eines Stück Papiers. Streicht man es glatt, so erhält man einen *Knick*. Ist dieser schön gerade, wird er *Faltkante* genannt; klappt man es wieder auf, kann man eine zurückgebliebene *Faltlinie* erkennen. In einigen Fällen wird dieser Vorgang auch *Hilfsknick* genannt, nämlich dann, wenn wieder *zurückgefaltet* und die entstandene Faltlinie ausschließlich zur Orientierung gebraucht wird.

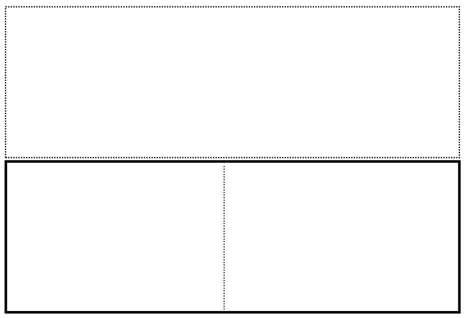
In der einschlägigen Literatur unterscheiden die Fachleute zwischen grundsätzlichen Faltmöglichkeiten. Darunter verstehen sie elementare Faltvorgänge, die jeweils in Faltanleitungen durch bestimmte Begriffe geordnet sind. Auf die komplizierteren Grundformen der höheren Origamikunst (z. B. Vogelform, Achtzackiger Stern, T-Faltung, Eulenform, Froschform usw.)[1] möchte ich lediglich verweisen. Vorstellen möchte ich hier solche Grundformen, von denen ich meine, daß sie von Grundschülern gebraucht werden könnten.
Zu den grundsätzlichen gebräuchlichen Faltmöglichkeiten gehören:

1.) *Buch* falten

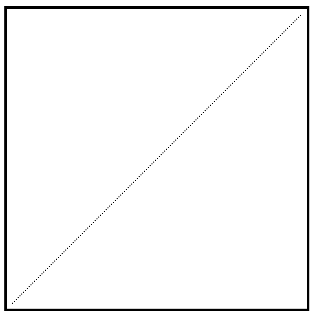


[1] Bei SAKODA, 1984, ist eine vollständige Auflistung der Grundformen mit Faltanleitungen zu finden.

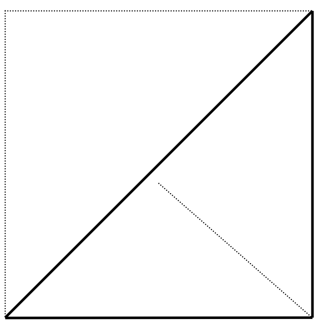
2.) *Taschentuch* falten



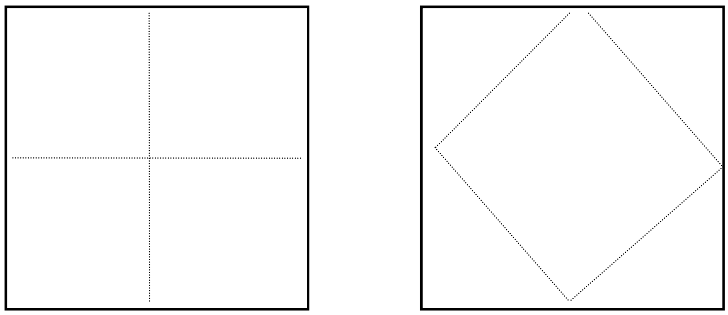
3.) *Umschlagtuch* falten



4.) *Helm* falten

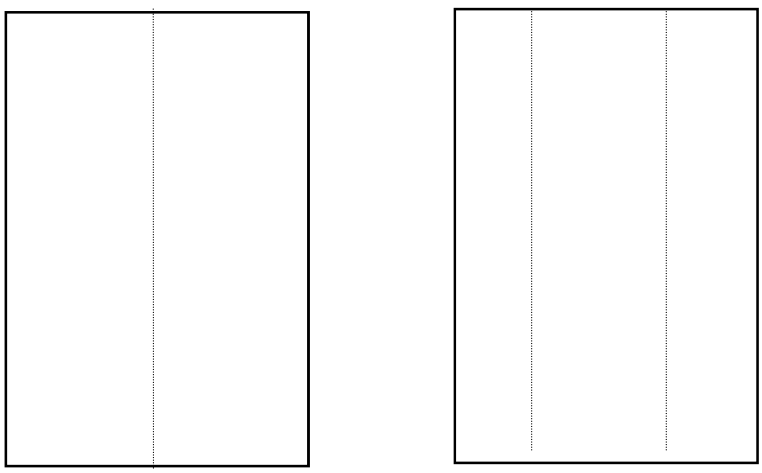


5.) *Briefumschlag* falten



Hilfsknicke

4.) *Schrank* falten



Hilfsknick

## 6.4 Kreatives und Nützliches mit Papierfalten

Mit Papier läßt sich beinahe alles mögliche durch Falten konstruieren. Aus einfachem Schreibpapier lassen sich kleine Basteleien, wie Knalltüte, Schwalben, Sterne und ‘Tischdeckchen’ herstellen. Etwas Übung braucht man schon für Faltarbeiten, wie Hüte, Schiffchen, Würfel und Schachteln. Und richtig anspruchsvoll kann es dann in der japanischen Origami-Papierfaltkunst werden; dort gibt es nämlich z. T. sehr komplizierte und schwer verstehbare Faltanleitungen für z. B. ‘Tiere’, ‘Pflanzen’, ‘Gebäude’ und ‘Fahrzeuge’.

Aber nicht nur solche Spielereien mit Freizeitcharakter lassen sich durch Papierfalten basteln, sondern auch nützliche Dinge, wie z. B. richtig feste und gebrauchsfähige Schachteln und Postpakete, Zeitschriftenbehälter und sogar Kartons.

(Auf einige der eben genannten Faltobjekt wird der Leser auch im nächsten Kapitel noch stoßen.)

*„Der Mensch liebt die Geometrie,*
denn als einziges Lebewesen
*kann er mit ihr etwas anfangen."*
(Harald MARTENSTEIN, 1998[1])

# 7 FALTGEOMETRIE IM MATHEMATIKUNTERRICHT DER GRUNDSCHULE

## 7.1 Vorbemerkung

Zu Beginn meiner Arbeit habe ich darauf hingewiesen, daß ich der Frage nachgehen werde, inwieweit und warum ausgerechnet Papierfalten als methodischer Zugang zur Geometrie im Mathematikunterricht enthalten sein kann bzw. sollte.

Wie in den vorangegangenen Kapiteln schon mehrmals erörtert worden ist, wird in der nahezu gesamten Literatur, die sich mit dem Erlernen geometrischer Gesetzmäßigkeiten befaßt, das Handeln der Grundschüler mit konkretem Material im Geometrieunterricht gefordert (siehe Kap. 4.1, PIAGETs Stadientheorie). Aufgrund der Entwicklungsstufe der Grundschüler soll der Lernstoff im Geometrieunterricht u. a. **anschaulich** und **handlungsorientiert** erfaßt werden können. Hierzu empfehlt z. B. WOPP[2], daß der Unterricht entsprechend organisiert sein muß: Die Schüler benötigen Material, Zeit und Handlungsraum, um ihrer natürlichen Neugier nachgehen zu können, denn „Probieren ist ein wichtiger Teil entdeckenden Lernens - man lernt dabei sicher nicht weniger als bei schnell geglückten Versuchen."[3] Beim entdeckenden Lernen ist es oft nötig, Verschiedenes als verschieden und Gleiches als gleich zu erkennen oder alle Möglichkeiten systematisch und vollständig durchzuarbeiten. Die Befähigung dazu muß, wie ausführlich erörtert, in der Grundschule beginnen. Dieses letzte Kapitel soll zeigen, wie das mit einfachsten Mitteln, wie dem Falten von Papier, möglich ist.

---

[1] In: Magazin d. Südt. Zeitung, v. 17.07.98, S.4

[2] 1994, S.20f

[3] FLOER/FORTHAUS, 1991, S. 25

**Aufgabe dieser Arbeit** soll es sein, da keine empirischen Untersuchungen durchgeführt worden sind, Ideen und Vorschläge für Unterrichtssituationen zu liefern, in denen Grundschüler anhand anregender Problemstellungen nach der Methode des entdeckenden Lernens vorgehen können.
Die Literatur bietet wohl zahlreiche Dokumente über Faltanleitungen von Figuren, die es nachzumachen/nachzukonstruieren gilt, und sicherlich ist das Lernen durch das Prinzip des Vormachens/Nachmachens sehr bedeutend für Grundschulkinder, aber nicht das einzige! Ich versuche mich für den Aufbau dieses Kapitels an die Auffassung von REIP[1] zu halten, der der Meinung ist, daß „das Problem der geeignete Ausgangspunkt des Lernprozesses ist, wenn entdeckendes Lernen betrieben werden soll“, wobei hier aber nicht nur das Befolgen einer Anleitung als Problem gemeint sein soll. Anhand einiger Beispiele möchte ich versuchen, deutlich zu machen, inwiefern das Papierfalten nützliche und brauchbare Problemstellungen liefern kann, die den Schülern einerseits einen Zugang zu geometrischen Regelmäßigkeiten liefern und damit auch ein Vorverständnis von Geometrie bzw. Mathematik entwickeln lassen und andererseits in denen sie sich nach ihrer jeweils eigenen Art Problemlösetechniken aneignen können.

Um einen Überblick von den Möglichkeiten der Behandlung von Papierfaltprobleme zu erhalten, habe ich sie nach verschiedenen Kategorien unterteilt, die sich in der Unterrichtspraxis z. T. aber erheblich überschneiden:

- Faltlinien
- Faltschnitte
- Faltkörper u. -figuren
- Körpernetze
- Kopfgeomtrie

[1] 1979, S. 193

## 7.2 Warum Papierfalten im Geometrieunterricht

Ausgangspunkt sei die These von Jürgen FLOER und Reinhard FORTHAUS, daß „jede geometrische Idee [...] eng mit Handlungen verbunden [ist]“[1] und daß sich die gesamte Geometrie der Grundschule mit **Tätigkeiten**, wie dem Schneiden, Malen, Spiegeln, Drucken, Legen und eben auch dem Falten abdecken läßt. Das Falten von Papier ist aus diesem Grund auch in den niedersächsischen **Rahmenrichtlinien** für Mathematik aufgenommen worden. Dort wird für das 1. und 2. Schuljahr u. a. das Herstellen von spiegelgleichen Figuren durch Falten und Schneiden (Faltschnitt) empfohlen, um den Schülern erste Vorerfahrungen zu Symmetrie zu ermöglichen: „Die fundamentale Idee in und hinter allen Faltspielen ist natürlich die Symmetrie“[2], erkannten FLOER/FORTHAUS und kündigen darüber hinaus an, daß durch Papierfalten einfache geometrische Grundformen (z. B. Quadrat, Rechteck, Dreieck, Kreis) und Begriffe (Mittelpunkt, Diagonale, Ecke usw.) immer wieder veranschaulicht und geübt werden können. Das Papierfalten bietet aber auch einen möglichen **Erfahrungsraum für Begriffe**, die Beziehungen, Größen und Eigenschaften bezeichnen (z. B. bei der Betrachtung von Längen, Flächen, Winkeln, Parallelität und rechten Winkeln, Symmetrien usw.) und für Muster, Parketten und zu räumlichen Figuren. Entscheidend ist dabei aber, daß die Kinder unbewußt mit geometrischen Gesetzmäßigkeiten konfrontiert werden, ohne sie hinterher gleich in ihrer mathematischen korrekten Bezeichnung zu verwenden. In einem propädeutischen Geometrieunterricht in der Grundschule steht vielmehr das Sammeln von geometrischen Erfahrungen im Mittelpunkt; darunter fallen dann eben hauptsächlich diejenigen besonders ins Gewicht, die immer wieder oder sogar regelmäßig wiederkehren. Hier besteht dann auch die Möglichkeit bestimmte Phänomene zu verbalisieren - und wie schon gesagt - ohne dabei ein von Anfang an vollständig exaktes Verständnis der Fachbegriffe besitzen zu müssen. Vielmehr soll allmählich durch Ansammeln von Erfahrungen eine Regelmäßigkeit oder ein Gesetz immer enger verbalisiert werden, bis es abschließend mit einem zugeordneten, konventionierten Begriff oder Symbol verwendet wird (Induktives Vorgehen).

---

[1] 1991, S. 24

[2] FLOER/FORTHAUS, 1991,S. 25

Falten und eben auch das Schneiden, sowie das Kleben von Papier eignen sich insofern als Material und als Tätigkeiten für die Schule, da sie an die **Vorkenntnisse der Kinder**, die sie aus der Freizeit, von zu Hause oder aus dem Kindergarten mitbringen, anknüpfen. U. a. bemerkten auch RADATZ/RICKMEYER, daß schon Schulanfänger beim Falten von Papierfliegern ein bemerkenswertes Geschick entwickeln würden. Aber nicht nur die **Auge-Hand-Koordination** wird gefördert; Papierfalten und ganz besonders das Befolgen bzw. Verstehen von Faltanleitungen (Instruktionen, Anweisungen) von, z. T. für die Kinder sehr komplex erscheinenden Papierfaltobjekte, **erfordern Strategien,** diese zu lösen. Somit können hier in offenen Unterrichtssituationen **Denkmuster entwickelt** werden, die bei der Suche nach Lösungen entstehen.

Erlaubt zur Faltgeometrie wird hier auch das Schneiden und Kleben sein, weil sich dadurch die sinnvolle Anwendung bzw. Gebrauch der Faltideen noch weiter ausbauen läßt. (Besonders interessant werden diese (Ergänzungs-)Techniken zwar z. B. beim Herstellen des Kantenmodells von Quadern aus Faltecken und Faltkanten; um jedoch den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen, werde ich diesbezüglich keine weiteren Kapitel einfügen.).

Die Auseinandersetzung mit Sachverhalten aus der Euklidischen Geometrie und aus der Topologie (siehe Kap. 7.8.2) hat eine große Bedeutung für die **Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens** der Kinder. Sie läßt sich auf propädeutischem Niveau in den Geometrieunterricht der Grundschule einbeziehen und in Verbindung mit anderen Zielen insbesondere zur Entwicklung weiterer allgemeiner Qualifikationen, wie systematisches und vollständiges Arbeiten oder Kreativität, nutzen.

## 7.3 Lernziele

Hier soll nach GUDER eine Zusammenfassung einiger schulischen Lernziele aufgestellt werden, die durch Papierfalten in einem propädeutischen Geometrieunterricht der Grundschule erreicht werden können.

- „Fordern und Fördern der manuellen Geschicklichkeit
- Genaues Beobachten und Nachmachen von vorgemachten Faltvorgängen
- Verstehen von speziellen ‘Fachausdrücken und Anweisungen
- Verstehen und Befolgen von Richtungsangaben wie nach links, nach rechts, nach vorn, nach hinten, nach oben, nach unten
- Vermittlung erster Eindrücke von geometrischen Zusammenhängen beim Entstehen der Faltlinien und beim Beobachten der Veränderungen der Form des Papierstückes“[1] (Z. B. ein Quadrat läßt sich aus zwei oder vier gleich großen Dreiecken zusammensetzen).

Darüber hinaus können laut RADATZ/RICKMEYER[2] beim Papierfalten auch soziale Lernziele erreicht werden, wenn z. B. den Kindern die Möglichkeit geboten wird, zwanglos voneinander und miteinander zu lernen. Sogar Erwachsene können dabei von den manchmal viel geschickteren Kindern lernen. Nicht zuletzt wird bei diesen kooperativen Tätigkeiten auch die sprachliche Kommunikation gefördert.
Zu vernachlässigen sind in keinem Fall die fachlichen Aspekte, die durch das Papierfalten behandelt werden können. Bei den Kindern werden geometrische Überlegungen ausgelöst und sie entwickeln allmählich ein Verständnis für Lagebeziehungen und Bewegungen im Raum (wie z. B. links von, oberhalb, unterhalb und drehen, kippen, klappen), Symmetrieeigenschaften, Begriffen wie etwa Seite, Ecke, Linie, Gerade, Mittellinie, Diagonale, Dreieck, Quadrat, Fläche und Körper.

---

[1] GUDER, 1991, S. 20

[2] 1991, S. 81

Als besonders sinnvoll erweist sich das Papierfalten auch vor allem dann, wenn die Schüler diese Anregungen mit in ihre Freizeit nehmen und sich weiter damit beschäftigen.

## 7.4 Allgemeine Definition eines Begriffs

Wie zuvor angedeutet, ist die Begriffsbildung bzw. der Aufbau eines Verständnisses geometrischer Begriffe Aufgabe eines Geometrieunterrichts. Zu berücksichtigen ist die Tatsache, daß die Begriffsbildung eine logische und eine psychologische Seite hat. „Logisch gesehen ist ein Begriff das Gemeinsame einer Menge von Objekten, das durch eine bestimmte Merkmalskombination zu beschreiben (definieren) ist und durch ein Wort bezeichnet wird. [...] Psychologisch gesehen ist ein Begriff immer dann gebildet, wenn man ihn verallgemeinern kann; d.h. wenn man ihn in neuen Situationen richtig zuordnet bzw. anwendet.“[1]

Die Bildung von Begriffen ist eine von vielen Fähigkeiten der Menschen. Wir bilden sie durch Abstraktionsprozesse. Dabei werden die meisten Eigenschaften der konkreten Gegenstände außer acht gelassen (es gibt wenige Ausnahmen). Es gibt Begriffe wie z. B. „Blume“ oder „Tisch“, womit dann keine bestimmte Blume oder kein bestimmter Tisch gemeint ist, sondern die Kategorie. In der Mathematik sind alle Objekte auch Begriffe. Wir denken z. B. bei einem „Rechteck“ nicht an ein ganz bestimmtes, sondern nur an das allgemeine Rechteck, das nur als gedachte Idealisierung existiert. Es kommen ihm dabei aber genau die Eigenschaften zu, durch die „Rechteck“ bestimmt ist: 4 Ecken, 4 Seiten, 4 Winkel, deren Winkelsumme zusammen 360° ergibt usw.

Die Begriffsbildung ist von hohem Nutzen und kann nach HOLLAND[2] auf drei verschiedene Wege erreicht werden.

---

[1] ZECH, 1981, S. 217

[2] Nach WITTMANN, 1981, S. 96

1. Begriffsbildung ausgehend von Beispielen (Abstraktion): Durch Begriffsbildung gelingt es dem Menschen, seine Umgebung, die aus unzählig vielen Erscheinungen besteht, überschaubar zu machen. Er reduziert die Komplexität der Wirklichkeit. So wird z. B. die riesige Zahl der Blumenarten durch den Begriff „Blume“ auf einen Begriff zusammengezogen.
2. Begriffsbildung ausgehend von schon gebildeten Begriffen (Spezifikationen): Mit Begriffen werden neue Erscheinungen eingeordnet. Kinder bezeichnen neue Dinge, die sie sehen und die Ähnlichkeit mit schon erlernten Begriffen haben, mit eben diesen Begriffen. Ein Trecker ist z. B. einfach ein Auto. Durch Begriffe werden allgemeine Aussagen über die Wirklichkeit gemacht, die dadurch überschaubarer wird.
3. Begriffsbildung ausgehend von Handlungen oder Konstruktionen (operative Begriffsbildung): Im Geometrieunterricht kommt es ständig zu Begriffsbildungen. Dabei werden Begriffe in der Grundschule nicht durch die Formulierung einer Definition gegeben, sondern durch konkrete Erfahrung des Kindes, von denen es abstrahiert. Die Bezeichnung eines Begriffes ist hierbei nicht primär wichtig, sondern die inhaltliche Vorstellung davon.

Beim Papierfalten ist es möglich ein Verständnis bestimmter geometrischer Begriffe zu bilden. Hierzu drängt sich vor allem der Weg auf, sich diese nach dem operativen Prinzip, nach AEBLI[1], zu erschließen. Das konkrete Material, die Zeichnungen und sprachliche Anleitungen sind hierbei gegeben, an denen die Kinder real oder gedanklich operieren und forschen können.

## 7.5 Didaktische Vorüberlegungen für faltgeometrische Themen

Die Vorgehensweise bei der Beschäftigung mit dem Falten von Papier kann hier von zwei Seiten angegangen werden. Zum einen ist dort ein **systematischer Lehrgang** mög-

[1] ZECH, 1981, S. 96ff

lich, in dem zuerst die Grundtechniken erlernt werden, denn „richtiges Falten will gelernt sein“[1], um dann weiter in einem anschaulichen algorithmischen Lernverfahren vom Lehrer vorbestimmte geometrische Gesetzmäßigkeiten zu erfahren. Aber auf diese Möglichkeit werde ich nicht näher eingehen, da der Schwerpunkt dieser Arbeit in eine ganz andere Richtung gesetzt werden soll. Denn auf der anderen Seite bietet das Material (Papier) und die Ideen, die in der Aktivität des Papierfaltens stecken, die Chance, sich nach der **Entdeckungsmethode** in offengehaltenen Problemstellungen selbständig geometrisches Wissen zu erschließen, das die Schüler zunächst mit eigenen Mitteln, sprich in eigenen Worten ausdrücken werden.

Die getrennte Betrachtung reiner geleiteter und reiner ungeleiteter Entdeckungsarbeit soll hier außer acht gelassen werden. Vielmehr wird ein Verschmelzen der beiden Richtungen auf dem **Prinzip der minimalen Hilfe** empfohlen (Hilf dem Schüler, es selbst zu tun!).

Beim Papierfalten kann das **Spiralprinzip** nach BRUNER befolgt werden. Das Falten von Papier kann im Geometrieunterricht in Abhängigkeit der Entwicklung des geometrischen Denkens der Schüler mit steigernder Komplexität der Inhalte immer wieder kehren. In Anlehnung an das Fünf-Stufen-Model des geometrischen Verstehens nach den VAN HIELES[2] können für das Papierfalten als Beispiele folgende - hier sprachlich formulierte - Problemstellungen zur Behandlung im Geometrieunterricht der Grundschule genannt werden (In der Grundschule sind die drei ersten stufen von Bedeutung):

<u>Niveaustufe 0:</u>

Was für Formen lassen sich aus einem Quadrat oder Dreieck falten?

<u>Niveaustufe 1:</u>

Prüfe, ob die vorgegebenen Formen Symmetrie/Spiegelachsen haben.

<u>Niveaustufe 2:</u>

Stelle gleichschenklige Dreiecke, Quadrate oder Vierecke durch Falten her? Welche davon sind besondere Vierecke? Was ist bei der Herstellung besonderer und nicht beson-

---

[1] „Wir falten, Grundschule, H. 12, 1983, S. 40-

[2] Nach RADATZ/RICKMEYER, 1991, S. 13f

derer Formen unterschiedlich? Lassen sich auch regelmäßige Vielecke durch Falten herstellen?

Für höhere Schulstufen eignen sich z. B. Untersuchungen der DIN-Formate[1] oder Probleme wie die Beweisbarkeit durch Papierfalten der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Quadrat[2] oder das Finden des jeweiligen Mittelpunktes für den Innen- bzw. Außenkreis eines Dreiecks. Glaubt der Leser, das Papierfalten sei spätestens nach dem Abitur erschöpft, so irrt er sich. HILTON und PEDERSEN[3] haben gezeigt, daß ein genügend langer Streifen steifen Papiers genügt, um über fortgesetzte Faltungen regelmäßige konvexe und sternförmige Polygone zu erzeugen, wobei anfängliche Ungenauigkeiten im Bestimmen der Faltwinkel sich nicht etwa aufschaukeln, sondern allmählich verflüchtigen (Die Begründung der Faltprozedur zieht zum einen wohlbekannte Sachverhalte der Elementargeometrie heran, zeigt andererseits aber interessante Verbindungen zu einfachen zahlentheoretischen Einsichten auf, die ebenso wie die Untersuchung von Papierfaltfolgen und Drachenkurven[4] einen Mathematikstudenten mit Interesse an der fraktalen Geometrie und Chaostheorie auf der Universität beschäftigen können.).

FLOER/FORTHAUS empfehlen aber, eben **nicht die schwierigen Falttechniken zum Mittelpunkt des Unterrichts zu machen**, sondern behaupten vielmehr, daß gerade „bei einfacheren Aktivitäten [...] Kinder oft mehr geometrische Erfahrungen machen [können]".[5] Gerade kleinere Probleme vermitteln den Schülern schnelle Erfolgserlebnisse, was einen großen Einfluß auf deren Motivation nimmt. Zech weist in diesem Zusammenhang darauf hin, „daß es jüngeren Schülern schwer fällt, mehrere Schritte vorauszudenken. U. a. deshalb bieten sich z. B. schwierigere Konstruktionsaufgaben erst für Schüler der Sekundarstufe an."[6]

---

[1] Nachzulesen bei PENTZLIN, 1986, S. 33ff

[2] Nachzulesen bei WEBER, 1995, S. 200ff

[3] 1996, S. 46ff

[4] Hierzu Näheres bei ZÜHLKE, 1997, S. 10ff und im Internet unter www.http//

[5] FLOER/FORTHAUS, 1991,S. 24

[6] ZECH, 1981, S. 317

Auf jeder Niveaustufe können geometrische Einsichten durch die Beschäftigung mit Papierfalten auf allen drei Ebenen des **EIS-Prinzips** nach BRUNER gewonnen und wiedergegeben werden. Zur Verdeutlichung zeige ich hier einige Beispiele:

- Enaktive Ebene: Eigene Faltvorgänge ausführen oder vorgemachte nachmachen.
- Ikonische Ebene: Abgebildete Faltanleitungen nachvollziehen bzw. selber Zeichnungen für Faltanleitungen konstruieren.
- Symbolische Ebene: Sprachliche Faltanleitungen nachvollziehen bzw. selber erstellen.

In diesen Beispielen zeigt sich, daß beim Papierfalten ebenso auch die Übergänge der Darstellungsebenen (Enaktivierung, Ikonisierung, Verbalisierung und Formalisierung) gepflegt werden können.

Da die Unterrichtsgegenstände (z. B. Seite, Diagonale, Halbieren, ist senkrecht zu) beim Papierfalten immer wieder in Erscheinung treten, stabilisiert sich das damit verknüpfte Verständnis (**Prinzip der Stabilisierung**). Fördernd wirkt sich dabei die Behandlung der Begriffe, Ideen und Verfahren in variierten Zusammenhängen aus.

Das Tätigsein mit dem konkretem Material (**dynamisches Prinzip**) steht selbstredend im Vordergrund. Um aber bewegliche Denkoperationen zu fördern, müssen die Handlungen in solchen Zusammenhängen organisiert werden, in denen sie reversibel, assoziativ und kompositorisch ausgeführt werden können (**operatives Prinzip**). Wie schon erwähnt kommt das bei der Begriffsbildung besonders zum Tragen. Ist ein Verständnis des Begriffs der Diagonalen am Quadrat z. B. durch Papierfalten erarbeitet worden, kann es in nachfolgenden Schritten an einem beliebigen Rechteck, an regelmäßigen und letztlich an unregelmäßigen konvexen Vielecken erweitert und somit gefestigt werden. Die Diagonale eines Blatt Papiers, das die Form eines beliebigen konvexen Vielecks hat, läßt sich durch geschicktes Falten in eine Seite eines Dreiecks verwandeln, bei dem zwei der Seiten des Vielecks dann die zwei Seiten des Dreiecks sind. Leider kann das Falten von Papier, das die Form eines nicht konvexen Vielecks hat, wenig anschaulich sein, wenn es um das Hineinfalten der Diagonalen geht, die z. T. außerhalb des Vielecks verlaufen.

## 7.6 Einführung in die Faltgeometrie

Wichtig ist, daß die Schüler eine positive Einstellung zum Papier als Material zum Basteln und zum späteren Experimentieren entwickeln. Für so manchen Schüler ist es sicherlich nicht vorstellbar, daß Papier ein überaus vielseitig verwendbares Material ist, mit dem man viele Interessante Dinge machen kann. LÖRCHER[1] behauptet, daß für einige Kinder das Papier den Händen einen zu geringen Widerstand bietet. Doch können einige anregende Beispiele dargeboten werden, um zu zeigen was in diesem Material für Möglichkeiten stecken und das es sich lohnt, kreativ sich damit auseinanderzusetzen. Später sollen sie nämlich durchaus selber z. B. nach neuen Figuren (wie Flugobjekte, Sterne, Tiere usw.) suchen, die sich durch Falten erstellen bzw. darstellen lassen.

Als Voraussetzung für das Papierfalten ist das richtige Papierfalten. Diesse Einsicht sollen die Kinder in einem genetisch-konstruktiv orientierten Lernprozeß gewinnen. Selbstverständlich kann man, um Zeit zu sparen, den Kindern es in einem für sie vorbereitetem Lehrgang beibringen. Doch soll diese Alternative hier nicht Thema sein.

In den Kapiteln 7.7 bis 7.10 sollen beispielhaft Problemstellungen als Anregungen aufgezeigt werden, die in einem Unterricht in verschiedenen Organisationstypen verwendet werden können (Stationsaufgaben, Gruppenarbeit, Partnerarbeit, Einzelarbeit, Freiarbeit, offener Unterricht usw.). Anhand dieser Beispiele werde ich deutlich machen, inwiefern geometrische Propädeutik beim Papierfalten durch die Vorbereitung bestimmter Begriffe statt finden kann, die im 5. Schuljahr in einem Geometrielehrgang benötigt werden.

[1] 1996, S. 29

### 7.6.1 Motivation der Schüler

Am Anfang soll der natürliche Spieltrieb bzw. die Freude am manuellem Tun des Kindes ausgenutzt werden, um in dieses Thema einzusteigen. Das Ziel einer solchen Einführung soll sein, daß die Kinder Lust und Spaß am Arbeiten mit dem Material Papier entwickeln. Viele Schüler bringen diese Bereitschaft zwar schon von zu Hause oder aus dem Kindergarten mit, aber in Anbetracht der veränderten Kindheit muß auch hierbei davon ausgegangen werden, daß sehr unterschiedliche Erfahrungen im Basteln mit Papier gemacht worden sind. Für den Unterricht eignen sich besonders einfache Basteleien, die fächerübergreifenden Inhalt haben sollten. Ohne den Kindern zunächst das ‘richtige Falten’ beizubringen, sollen sie hier einfach das Vorgemachte, Vorgezeichnete oder Fotografierte versuchen nachzumachen (das Vorgemachte durch den Lehrer hat laut GUDER hierbei den größten Einfluß). Das kann in Einzelarbeit, aber auch in der Besprechung mit dem Partner, gemacht werden. GUDER wie auch RADATZ/RICKMEYER empfehlen zu Beginn durch Falten die Herstellung eines Wurfpfeiles (Papierfliegers) und den einer Knalltüte[1]. Wenn dann anschließend das selbstgebaute Spielzeug ausprobiert wird, ahnt wohl auch der skeptischste der Schüler nicht, daß er es hiermit schon mit einem Bereich seines vielleicht ungeliebten Mathematikunterrichts zu tun hat: Denn, ob der Flieger geradeaus und lange, also weit fliegt, oder die Tüte so richtig knallt, hängt davon ab, wie gut bzw. wie genau er das Papier vorher bearbeitet hat. Dabei kommt es beim Flieger u. a. darauf an, daß er um so besser fliegt je ‘symmetrischer’[2] er gefaltet worden ist. Auch ist es bei der Knalltüte entscheidend, daß z. b. die herausschnellende Tasche durch ungenaues Falten nicht eingeklemmt worden ist, somit nicht bzw. kaum herausschnellt und eben nicht knallt. Hier hat man nämlich im ersten Schritt die Kanten

---

[1] Die genauen Faltanleitungen sind hier noch nicht von Bedeutung, daher verweise ich diesbezüglich lediglich auf RADATZ/RICKMEYER, 1991, S. 87 (Papierflieger) und S. 89 (Knalltüte).

[2] Hier ist die Verwendung des Wortes weniger im rein mathematischen Sinn, als vielmehr als Deutung durch die dem Menschen gegebenen Sinne gemeint. Denn danach kann eine Figur sehr wohl ‘symmetrischer’ als eine andere sein (z. B. bei der Beschreibung von Dingen in der Natur). Der Mathematiker würde sich wohl die Haare raufen, und daher ist es für den Geometrieunterricht natürlich wichtig, diesen Begriff allmählich enger zu fassen, bis am Ende ein eindeutiges mathematisches Verständnis des Bezeichneten vorliegt.

und Ecken des Papiers genau an die Mittellinie falten müssen damit in den beiden darauffolgenden Faltungen die Seitenränder und Ecken genau übereinander liegen können. RADATZ/RICKMEYER[1] machen einen weiteren Vorschlag, um die Motivation zu erhalten, indem die Objekte bemalt werden; dadurch können die Schüler ihnen jeweils einen individuellen Charakter verleihen. Mit Papierfliegern o. ä. empfehlt GUDER Flugwettbewerbe zu veranstalten.

Eine andere Beschäftigung mit Papier ist das Herstellen von **Klecksbildern**. Hierzu müssen die Kinder zunächst nur einfach ein Stück Papier falten um einen Knick zu erhalten, das Papier wieder öffnen und einen Farbklecks mit Wasserfarben ‘in’ das Papier setzen. Zusammenfalten, vielleicht ein wenig darüber streichen, öffnen und betrachten, vergleichen, darüber sprechen und vielleicht Regelmäßigkeiten entdecken (z. B. Eigenschaften der Achsensymmetrie). Hier wird selbstverständlich nicht eine Definition erwartet werden können, dennoch ist zu erwarten, daß die Kinder mit ihren eigenen Worten beschreiben was sie sehen und was ihnen dabei auffällt. Daß das Klecksbild auf der einen Seite genauso aussieht wie auf der anderen Seite, sollte aber schon vom Lehrer korrigiert werden, indem er klar stellt, daß es ja aber ‘irgendwie nicht genauso aussehe’, sondern ‘eben nur fast genauso aussehe’; und daß man z. B. doch mal versuchen sollte zu beschreiben, was denn nun gleich und was verschieden ist. Die Bilder, die häufig ‘Schmetterlinge’ darstellen können bemalt werden (dabei ist auf die symmetrische Anordnung der Augen, Fühler und vielleicht Gliedmaßen zu achten) und nach bestimmten Merkmalen sortiert und im Klassenraum aufgehängt werden.

### 7.6.2 Richtiges Falten lernen

In der einschlägigen Literatur[2] steht immer am Anfang das Erlernen des *richtigen Faltens*. Ein Problem dabei ist, daß in einer Klasse die visuelle Wahrnehmungsfähigkeit

---

[1] 1991, S. 81

[2] Z. B. bei KÜHL, 1983, S. 40f

und die psychomotorisch gesteuerte Feinkoordination von Auge-Hand höchstwahrscheinlich sehr unterschiedlich ausgeprägt ist, so daß hier unterschiedliche Voraussetzungen für das Papierfalten immer erwartet und somit berücksichtigt werden müssen. Die Beschäftigung mit Papierfalten wird sich hier aber in jedem Fall fördernd auf die Entwicklung auswirken, wenn das stetige Falten und Schneiden von Papier in unterschiedlichen Vorhaben immer wieder das Bemühen um das genaue Hinsehen, um das genaue Falten und um das genaue Schneiden erfordert. Dabei erhält der Schüler entweder direkt eine Rückmeldung (z. B. Ecke genau bzw. nicht genau auf Ecke) oder eine vermittelte Rückmeldung (z. B. Bei der Prüfen nach der Herstellung eines Sechsecks auf dessen Regelmäßigkeit durch Drehen auf einer Schablone).

Damit die Kinder das richtige Falten erlernen muß man sich als ‘Faltlehrer’ zunächst selber darüber Bewußt sein, wie das richtige Falten überhaupt definiert ist. In den Origamiaxiomen ist ein Fundament dafür gegeben worden. Aber bitte versuchen Sie, lieber Leser, einmal selbst eine Faltlinie durch einen gegeben Punkt zu falten. Das wird vielleicht noch gerade gelingen (je nachdem, durch was für einen ‘Klecks’ oder Kreisscheibe der Punkt dargestellt worden ist), aber beim Versuch eine Faltlinie zu falten, die durch einen gegeben Punkt und gleichzeitig dabei eine Ecke des Papiers durchlaufen soll, stellt sich schon als schwer praktikabel heraus. Und ob das Origamiaxiom Nr. 2 nachvollzogen worden ist, läßt sich höchstens auch nur an einem transparentem Blatt Papier zeigen. Zumal ein Mathematiker solche Versuche pauschal immer als nicht gelungen kommentieren würde.

Selbstverständlich kann man auch die Kinder in selbsttätiger Auseinandersetzung mit den Faltaufgaben herausfinden lassen, daß es Sinn macht, ‘richtig’ zu falten. In Anbetracht des Themas meiner Arbeit werde ich hier auch einen Vorschlag machen, wie die Schüler im Unterricht das tatsächlich selbst (untereinander) herausfinden können. Das macht insofern Sinn, weil dadurch ein grundlegendes Verständnis für die hohe Kunst des Papierfaltens entwickelt werden kann. Denn oftmals verleiten auch scheinbar leichtere Aufgaben zum schnellen und ungenauen Falten, erzielen dadurch aber schlechte bzw. unbrauchbare Ergebnisse, wie z. B. beim Bau eines Fliegers oder Sterns.

Hier soll also nun nicht entgegen den behandelten Ideen dieser Arbeit ein systematischer Faltlehrgang angeboten werden (der aber möglich ist), sondern die Kinder sollen vielmehr mit einfachen Faltaufgaben konfrontieren werden, die sie unter dem Prinzip der minimalen Hilfe durch den Lehrer alleine, aber auch in Partnerarbeit, in der Gruppe oder Klasse lösen, ihre Ergebnisse vergleichen und sich untereinander helfen können. Hierbei ist das Ziel, daß die Kinder die Erkenntnis gewinnen sollen, daß die Faltprodukte unterschiedliche Ergebnisse aufweisen, wenn man unterschiedlich genau faltet.

Eine Übungen sollen hier auch schon genannt werden: Sie behandelt den Themenbereich der Achsensymmetrie. Exemplarische Aufgabe ist hierfür folgende: Falte ein Blatt Papier, das etwa in der Mitte einen Schmetterling zeigt so, daß die Faltlinie *durch die Mitte* des Schmetterlings läuft und der Schmetterling außen sichtbar bleibt. Nun such Dir eine Stelle auf der einen Hälfte des Schmetterlings aus durch die du dann eine Nadel stichst. Klappe auseinander und prüfe, ob die Nadel die gleiche Stelle in der anderen Hälfte des Schmetterlings durchstochen hat... Es kann im umgekehrten Sinne auch das Konstruieren achsensymmetrischer Bilder/Figuren angeregt werden: Falte ein Blatt Papier, durchstich es mehrmals, öffne es wieder und verbinde die Punkte mit Linien (es können auch Faltlinien sein).

### 7.6.3 Das erste Falten einer Linie

Die einfachste Aufgabe ist sicherlich das Herstellen einer einfachen Faltlinie. Man kann davon ausgehen, daß nahezu sämtliche Kinder bei der Einschulung schon erste Erfahrungen mit dem Falten von Papier gemacht haben: Schon einfach beim Wegwerfen von Papier, beim Zuklappen von gemalten Bildern und z. b. beim versehentlichen Umknicken von Blättern jeder Art, wie etwa ‘Eselsohren’ im Vorlesebuch-, Malbuch- u. Heftseiten. Abgesehen von den Schülern, die sogar schon Schwalben, Hüte oder ähnliches schon gebastelt haben kann man aufgrund des zuvor genannten allein annehmen, daß hierbei auch sicherlich erste Erfahrungen im Wiederglattstreichen gemacht worden sind und weiter, daß ‘Knickfalten’ irgendwie auch nicht mehr so richtig wegzubekommen sind, auch wenn man noch so über diese streicht, sie bleiben doch noch immer als Faltlinien zurück.

Für die Faltarbeiten im Geometrieunterricht der Grundschule sollen diese ersten Erfahrungen aufgegriffen und in bestimmte Bahnen gelenkt bzw. vertieft werden.

An allerhand verschiedenen Materialien sollen die Kinder herausfinden, mit welchen Materialien sich besonders gute Faltlinien herstellen lassen und mit welchen Materialien weniger gute bzw. gar keine. Hierbei soll den Kindern auch die Möglichkeit geboten werden, die jeweiligen Faltkniffe mit verschiedenen Werkzeugen glatt streichen zu können. Die Kinder sollen in freier Arbeit im Unterricht die Faltprodukte (Faltlinien) untereinander vergleichen können und ihre Erfahrungen austauschen, wie sie diese oder jene denn hergestellt haben. Das kann je nach Situation den Schülern überlassen oder vom Lehrer angeregt werden. Nach Kriterien wie z. B. schön, deutlich und gerade soll anhand der hergestellten Faltlinien herausgefunden werden, welches Faltmaterial und welche Falttechnik denn nun am geeignetsten ist, um schöne, deutliche und gerade Faltlinien herzustellen - und wie läßt sich eigentlich feststellen, wie gerade eine Faltlinie ist? Oder sind nicht sogar alle Faltlinien richtig gerade? Hierbei werden die Kinder erkennen, daß man Papier (bei veränderten Eigenschaften des Papiers) falten und glatt streichen kann, wie man will und womit man will, am Ende kommt doch immer eine (Falt-) Linie dabei heraus, die gerade ist und die man dann auch Teil einer Geraden nennen kann, wenn man gleichzeitig dabei mit den Kindern erarbeitet, daß man diese ‘Linie’ in beide Richtung beliebig verlängern kann. Somit wird aus einer Handlung heraus ein Begriff verbal beschrieben (siehe Kap. 7.7.2). Eine solche Faltkante eignet sich im Übrigen auch dazu, um gerade Linien zu erzeugen, indem man sie wie ein Lineal benutzt.

### 7.6.4 Zu den Fachbegriffen des Papierfaltens im Geometrieunterricht

Vorangegangen sind mittlerweile schon einige Begriffe, die sich speziell nur auf das Papierfalten beziehen (Faltlinie, Faltkante). Fachbegriffe helfen, die einzelnen Arbeitsschritte von Faltanleitungen zu verstehen, dabei verdeutlichen sie die Faltvorgänge. Für den Geometrieunterricht der Grundschule ist es daher Aufgabe, mit den Kindern die Begriffe Mittellinie, Diagonale, Seite, Kante, Ecke, Mittelpunkt zu erarbeiten. Diese Begriffe können schon im ersten Schuljahr immer wieder bei den vorgemachten und gleichzeitig mündlich kommentierten Faltanleitungen des Lehrers Verwendung finden. Eine zunehmende Verlagerung zu rein verbalen (Sprache oder Text) Anleitungen ist anzustreben. Nach RADATZ U. A.[1] werden Ecke und Seite den Kindern an geeigneten Formen gezeigt. Diagonalen und Mittellinien werden als Faltlinien veranschaulicht, deren Schnittpunkt als Mittelpunkt bezeichnet wird.

## 7.7 Experimentieren mit Faltlinien

### 7.7.1 Vorbemerkung

Eine besondere Eigenschaft der Faltlinie soll hier ausgenutzt werden: Sie ist nämlich richtig schön gerade, was so manche von Kinderhand gezeichnete Linie nicht gleich von Anhieb ist und erst über längere Zeit eingeübt werden muß. Faltlinien sind hingegen von fast jedem ohne große Mühe herzustellen. Ein anderes Problem macht da eher ein wenig Schwierigkeiten: Die Beschäftigung mit bloßen Linien kann, aufgrund ihrer großen Distanz zur Umwelt, womöglich die Kinder nur für kurze Zeit bei Laune halten. Deswegen heißt es, hier geeignete Problemstellungen (ggf. <u>mit</u> den Kindern) zu finden, die die Kinder zum Arbeiten anregen.

Bevor man die Faltlinien einfach so drauf los behandelt, muß dem Lehrer bewußt sein, daß hier zwischen mehreren Betrachtungsweisen der Faltlinien unterschieden werden kann. Zum einen stellen die eigentlichen Faltlinien, so wie sie sich auch nach den Origamiaxiomen verhalten, Strecken dar, die auf den Papierrändern jeweils ihren Anfangs- und Endpunkt haben. Zum anderen stellen die Faltlinien einfach nur (gerade) Linien dar,

---

[1] 1998, S. 130

die bei topologischen Fragestellungen von Bedeutung sein können. Ein weiterer Aspekt der Faltlinien ist, daß sie sich anbieten, den Begriff der Geraden einzuführen und sie zu behandeln (Denn LÖRCHER[1] hat erkannt, daß man beim Falten Ebenen miteinander schneidet und Ebenen schneiden sich nun einmal in Geraden.). Für den letzten Fall bedeutet es, daß sich alle Faltlinien schneiden, die nicht parallel zueinander sind, da sie schließlich nur Teile von Geraden darstellen und man sie sich verlängert vorstellen muß. (Das ist übrigens auch der Grund, weswegen bei den Origamiaxiomen in Kap. 6.1.1 das Parallelenaxiom der Euklidischen Ebenen fehlt.). Während im zweiten Fall dieses Problem allgemein nicht eindeutig im Voraus definiert ist, trifft es im ersten Fall, bei der Betrachtungsweise, daß die Faltlinien Strecken darstellen sollen, auf keinen Fall zu: die Linien, die sich auf dem Blatt Papier nicht schneiden, schneiden sich nie.

### 7.7.2 Methodische Überlegungen

Bezüglich dieses Materials ist m. E. die Variante für den propädeutischen Geometrieunterricht der Grundschule von weit größerer Bedeutung, die allmählich auf den Begriff der Gerade hinführt. Durch Falten läßt sich der Begriff Gerade auf anschauliche Weise einführen und ist deswegen auch in nahezu jedem Schulbuch des fünften Schuljahres durch einen systematischen Lehrgang verankert:

> „Zeichne auf ein Blatt Papier zwei beliebige Punkte A und B und falte das Blatt so, daß die Faltlinie genau durch die Punkte A und B geht. Wieviel solcher Faltlinien durch diese beiden Punkte gibt es?“[2] Und so weiter...

Nach dem Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte wird hier der Begriff Gerade eingeführt. Für den Geometrieunterricht mit Grundschülern kann diese systematische Vorgehensweise wohl auch erfolgreich sein, soll hier aber nicht näher verfolgt werden. Im geometrischen Anfangsunterricht ist es zunächst nicht unbedingt erforderlich, ein exaktes

[1] 1996, S. 28

[2] SCHRÖDER, 1989, S. 60

Verständnis von Geraden im konkreten mathematischen Sinn in bezug auf die Unendlichkeit der Länge zu entwickeln, als vielmehr das Bewußtsein, daß es sich bei Faltlinien um richtig schöne gerade Linien handelt und man sie deswegen eben auch gleich als Geraden benennen kann, die man in beide Richtung beliebig verlängern kann und immer noch gerade bleiben (was dann ja doch eine Definition von Unendlichkeit wäre - allerdings kindgemäß).

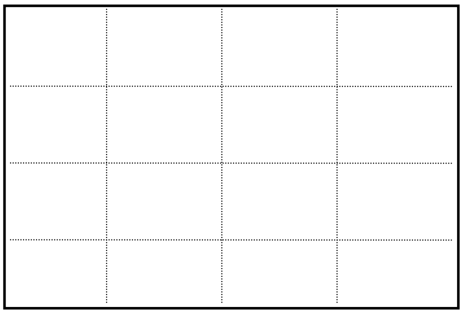
Es sollen Situationen hergestellt werden, in denen die Kinder mit solchen Geraden Erfahrungen sammeln können. Nach LÖRCHER ermöglicht das Herstellen mehrerer Geraden die Konstruktion von Winkeln und bereits bekannter Polygone, wie Dreiecke, Vierecke und Vielecke. Durch geeignete Aufgabenstellungen können die Kinder z. B. herausfinden wieviel Geraden man benötigt, um solche geometrische Formen konstruieren zu können. Wie verhält sich das Verhältnis zwischen Anzahl der Geraden und Anzahl der Schnittpunkte bei steigender Anzahl der Ecken einer Form?

Ein bedeutungsvolles Material ist das Papier für die Veranschaulichung bzw. die handlungsorientierte Einführung der Relationsbegriffe **ist senkrecht zu** und **ist parallel zu**. Da bei einem orthogonalen Geradenpaar die eine Gerade die Symmetrieachse der anderen ist, läßt sich das sehr deutlich durch das Falten eines Blatt Papiers darstellen. Gleichzeitig erhält man den sogenannten Faltwinkel ($90^0$) und die Eigenschaften des rechten Winkels. Beim Falten einer zweiten Gerade senkrecht zu einer der beiden eben genannten ersten, hat man dann sogar gleichzeitig eine parallel verlaufene Gerade zu der jeweils anderen[1].

In spielerischen Situationen soll mit **verschiedenen Papierformaten** (kreisförmig, quadratisch, in der Form regelmäßiger Fünf-, Sechs- und anderer Vielecke) gebastelt werden. Um sich dabei nur mit den durch Falten entstehenden Geraden zu beschäftigen, bieten sich komplexe Aufgabenstellungen an, die die Kinder zum Suchen und Ausprobieren provozieren, um Dreiecke, Vierecke, Vielecke und Muster zu erstellen und zu konstruieren. Dabei kommt es eben darauf an, mit dem o. g. unterschiedlichen Papierformaten auch schöne Formen und Muster zu erstellen bzw. Konstruktionen zu finden, mit denen sich schöne, nämlich gleichmäßige oder regelmäßige Formen, Muster und

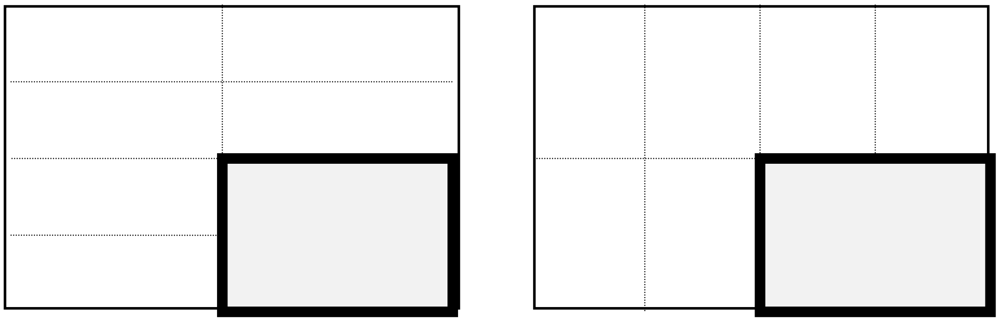
[1] Um den Rahmen meiner Arbeit nicht zu sprengen verweise ich hier lediglich auf die Anleitungen zu den Themen, die man in fast jedem Schulbuch der vierten bzw. fünften Schulstufe findet.

auch Bandornamente herstellen lassen. Z. B. sind bei einem rechteckigen und einem dreieckigen, gleichseitigen Stück Papier folgende Muster möglich:



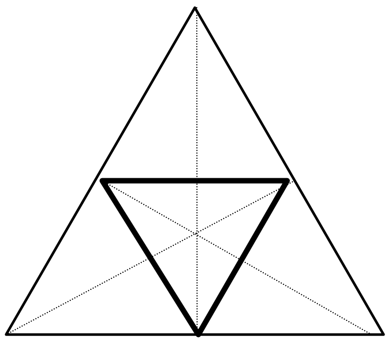
(Hier könnte z. B. die Einsicht gewonnen werden, daß man in ein Rechteck wiederum in mehrere kleine Rechtecke falten kann.

So richtig interessant wird es dann, wenn Kinder plötzlich feststellen, daß man in ein rechteckiges Stück Papier auf zwei verschieden Weisen acht kleine Rechtecke hineinfalten und diese dann miteinander vergleichen kann:

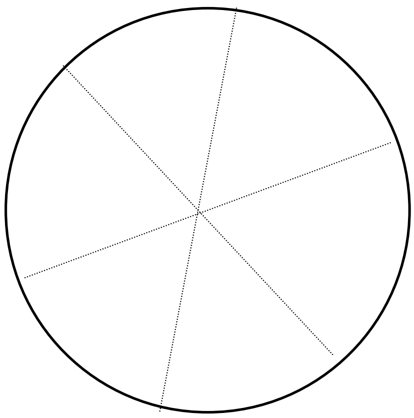


)[1]

Eine andere Ausgangsform ist das gleichseitige Dreieck



(Beim gleichseitigen Dreieck erfährt man z. B. durch geschicktes Falten, daß es aus mehreren kleinen Dreiecken konstruiert werden kann)

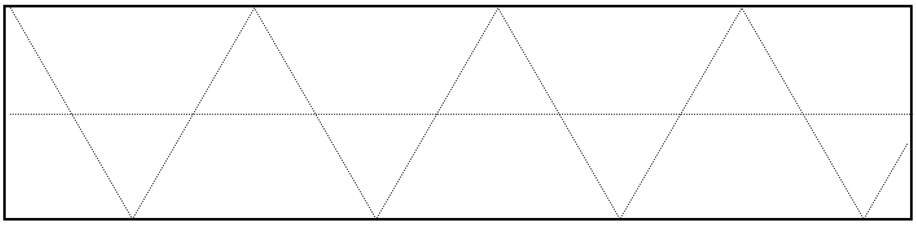


Beim Kreis stellt man fest, daß man falten kann wie man will (vorausgesetzt man faltet immer so, daß bei einer Halbierung des Kreises die Kreishälften zur Deckung kommen),

[1] Vgl. bei PROKSCH, 1956, S. 103

die Faltlinien gehen immer durch einen gemeinsamen Punkt. Hier besteht die Möglichkeit, den Begriff des Mittelpunktes eines Kreises einzuführen.

Bandornamente lassen sich ebenfalls durch Papierfalten konstruieren:



Im Klassenverband ließen sich dann Ideen einiger Schüler bezüglich der Konstruktionen auch näher erörtern, so daß letztendlich die Kinder sich untereinander helfen und von ihren Ideen berichten. Da bei den Konstruktionen für regelmäßige Muster sicherlich die Hilfsmittel Mittellinie und Diagonale benutzt wurden (ohne daß die Kinder dabei wußten, wie man diese Gebilde nennt), besteht hier dann auch die Möglichkeit nach dem genetischen Prinzip, sogleich deren Bezeichnungen einzuführen.
Meinen Erfahrungen zufolge gelten als besonders schwer die Aufgaben solchen Typs, die die Grundschulkinder veranlassen sollen, Konstruktionen für bestimmte regelmäßige Vielecke zu finden. Einfach ist das, solange sich die Aufgaben auf das Suchen nach Quadraten und Rechtecken beziehen; schwerer wird es, wenn man einige Gesetze der Trigonometrie benötigt, um z. B. ein gleichseitiges Dreieck oder regelmäßiges Sechseck zu konstruieren. Durch Anleitung ließe sich dieses für die Grundschüler jedoch auch durchführen.

Ein topologischer Aspekt ist hier zu behandeln, indem die Schüler z. B. untersuchen, mit wieviel Geraden sich wieviel bzw. wiewenig **Gebiete** auf dem Blatt Papier einteilen lassen. Dazu kann man die Ergebnisse in geeigneten Tabellen notieren (z. B. Anzahl der Geraden / Gebiete / Schnittpunkte). Eine Weiterbehandlung dieser Probleme ist dann gegeben, wenn man auch noch nach unterschiedlichen Vorgaben Einfärbungen vornimmt (z. B. Nachbarländer dürfen nicht dieselbe Farbe haben usw.). Anstelle von Gebieten oder Ländern auf Blättern können hier z. B. auch Einteilungsprobleme von Kinderzimmern, die bei einer bestimmten Anzahl von Geschwistern durch Trennwände aufgeteilt werden müssen, zur Bearbeitung inszeniert werden. In Anlehnung an eine Idee von Marga BECKSTEIN[1] könnten auf dem Blatt Papier ein oder mehrere Häschen dargestellt werden, die mit Faltlinien 'eingezäunt' werden sollen.

Eine andere Möglichkeit ist die Behandlung der **Lagebeziehungen**, die die Geraden zueinander haben können. Wie oben schon angedeutet läßt sich durch das Herstellen mindestens zwei geeigneter Faltlinien der Begriff **Schnittpunkt** einführen. Durch geeignete Aufgabenstellungen können die Kinder z. B. herausfinden, wieviel Geraden man benötigt, damit sich gewisse Einteilungen auf 'Landkarten' ergeben. Wie verhält sich das Verhältnis zwischen Anzahl der Geraden und Anzahl der Schnittpunkte?
Ein bedeutungsvolles Material ist das Papier für die Veranschaulichung bzw. die handlungsorientierte Einführung der Relationsbegriffe *ist senkrecht zu* und *ist parallel zu*. Da bei einem orthogonalen Geradenpaar die eine Gerade die Symmetrieachse der anderen ist, läßt sich das sehr deutlich durch das Falten eines Blatt Papiers darstellen. Gleichzeitig erhält man den sogenannten Faltwinkel ($90^0$) und seine Eigenschaften. Beim Falten einer zweiten Gerade senkrecht zu einer der beiden eben genannten ersten, hat man dann sogar gleichzeitig eine parallel verlaufene zu der jeweils anderen[2.]

Wie ebenfalls oben schon z. T. veranschaulicht dargestellt lassen sich auch vorgegebene geometrische Formen untersuchen. LÖRCHER[3] schlägt vor, daß die Kinder an unterschiekdlichen Ausgangsformen Symmetrieachsen finden sollen. Es bietet sich die Möglichkeit an, die Begriffe **Seite**, **Mittellinie** und **Diagonale** erfahren zu lassen. Die Eigenschaften des Begriffs der Diagonale führen sich fast von alleine ein, wenn die Kinder beim Herstellen von Formen beobachten, daß einige Faltlinien im Vergleich zu anderen Faltlinien bei regelmäßigen Vier- und Vielecken besonders verlaufen: Die einen verlau-

---

[1] 1986, S. 367

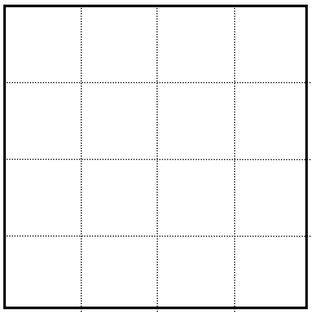
[2] Um den Rahmen meiner Arbeit nicht zu sprengen verweise ich hier lediglich auf die Anleitungen zu den Themen, die man in fast jedem Schulbuch der vierten bzw. fünften Schulstufe findet.

[3] 1975, S. 140

fen von einer Ecke zur anderen (Diagonalen) - und sind dabei nicht eine Seite der Figur - und die anderen von der Mitte einer Seite zur Mitte der gegenüberliegenden Seite Mittellinien). (Die Besonderheiten der Symmetrieachsen kommen bei der Behandlung der Faltschnitte, Kap. 7.8, deutlicher zur Geltung.).
Die Figuren können auf ihre Symmetrieachsen hin untersucht werden und dann in Gruppen zugeordnet werden (z. B. eine, zwei, mehrere Symmetrieachsen). Ziel bei solchen Problemen zur Gruppenbildung ist, daß die Schüler grundlegende Erfahrungen im Klassifizieren machen sollen.

Eine andere Ausgangssituation ist es, wenn man die Blätter vorher mit einigen Punkten versieht und vereinbart, daß eine Faltlinie mindestens immer durch zwei Punkte verlaufen soll (ab der Anzahl von drei Punkten sind sie auch gleichzeitig die Vorgabe der Schnittpunkte von Geraden). Wieviel verschiedene Geraden lassen sich herstellen, wenn auf dem Blatt Papier drei Punkte vorgegeben sind? Das von den Geraden eingeschlossene Gebiet soll gefärbt werden. Was für eine Form zeigt sich? Wieviel Geraden kann man bei vier Punkten erzeugen? Ist es auch möglich fünf Punkte vorzugeben, wobei sich anschließend nur eine einzige Gerade falten läßt? Was ist dabei die Schwierigkeit? Wie verhält sich das Verhältnis zwischen der Anzahl der Punkte und der Anzahl der möglichen Geraden, die durch einen der Punkte verlaufen? (Tabelle anfertigen). Was für Formen lassen sich in den entstandenen **Netzen** entdecken? Wieviel Ecken und Seiten haben sie? Kannst Du ein Netz konstruieren, in dem andere Formen zu sehen/enthalten sind? Kann man auch schöne gleichmäßige Netze oder sogar Formen und Muster konstruieren? Wie kann man dabei vorgehen? Dabei kann die Aufgabe so gestaltet sein, indem man Punkte vorgibt bzw. vorgeben läßt, aber auch, indem man die Kinder frei experimentieren sprich falten läßt.
Hier, wie auch in vielen anderen der Papierfaltexperimenten, lassen sich durch **Nachzeichnen** der Faltlinien und sogar **Ausschneiden** der Formen die Phänomene (Faltergebnisse) verdeutlichen.

RADATZ/RICKMEYER[1] machen den Vorschlag ein quadratisches Blatt Papier als Ausgangsfigur zu wählen, das man als erstes durch Falten in 16 kleine Quadrate unterteilt. Dieses erhält man, indem ein Schrank gefaltet wird, aufgeklappt wird, um $90^0$ gedreht wird und wieder ein Schrank gefaltet wird. Die Ausgangsfigur ist somit 16 Quadrate groß (16 Q) und hat einen Umfang von 16 Karolängen (16K).



Jetzt kann man die Schüler anregen, Figuren zu falten, die 2, 4, 8 oder mehrere Q groß sind. Dabei können die Lösungen die Formen von Rechtecken, Dreiecken, Sechs und Achtecken haben.
Es lassen sich aber auch Figuren finden, die Vorgaben bezüglich des Umfangs erfüllen.
„Für die Kinder liegt hier ein Tummelfeld für das Entdecken und Erfinden eigener Aufgaben"[2]

Eine nette Idee haben RADATZ U. A. offensichtlich von einer unbekannten Autorin eines Beitrages in der Grundschulzeitschrift[3] aufgegriffen. Dabei handelt es sich um sogenannte **Falt- und Schneidegeschichten**. Sie enthalten Falt- und Schneideaufträge, die in phantasievolle Geschichten eingebettet sind. Deren Prinzip ist im Grunde einfach: Eine Ausgangsfigur wird personifiziert und ist mit ihrer Gestalt nicht zufrieden. Im Laufe der Geschichte nimmt sie dann durch unterschiedliche Erlebnisse allerhand andere Formen ein.

---

[1] 1991, S. 77

[2] RADATZ/RICKMEYER, 1991, S. 77

[3] *Das kleine blaue Quadrat*. In: Die Grundschulzeitschrift 1994, S. 55-59

Fortgeschrittene, die die Begriffe Quadrat, ist senkrecht zu und ist parallel zu schon kognitiv erfaßt haben, sollten sich mit derart Aufgaben beschäftigen, wie sich z. B. ein Quadrat durch Falten konstruieren läßt, von dem zwei Eckpunkte schon vorgegeben sind (Dieses ist vielleicht im Klassenverband nicht unbedingt für die Grundschule geeignet, sondern eher eine Aufgabe für Tüftler). Auf beeindruckende Weise kann dieses auch anhand eines großen Stückes Zeitung oder eines Stückes Papier, das keine geraden Kanten hat demonstriert werden. Ein ähnliches Problem ist auch die Konstruktion gleichschenkliger Dreiecke, von denen zwei Eckpunkte vorgegeben sind. Und wieviel Lösungen gibt es bei dieser Aufgabe?

## 7.8 Experimentieren mit Faltschnitten

### 7.8.1 Vorbemerkung

Hier soll zwischen zwei Prinzipien unterschieden werden. Einerseits der einfache Faltschnitt an der Faltkante des einmal gefalteten Blatt Papiers und andererseits das ein- und mehrmals gefaltete Blatt Papier, bei dem sämtliche Seiten und Ecken des Faltproduktes eingeschnitten werden darf.

Bei dem zuerst genannten Prinzip ist die Achsensymmetrie der Hintergrund dieser einfachen Klappungen. Unter das zweite Prinzip fallen mehrmalige Klappungen und Drehungen.[1]

[1] Anmerkung: Für translationssymetrische Figuren wie Bandornamente und Schubspiegelungen sind mir keine Konstruktionen bekannt.

### 7.8.2 Methodische Überlegungen

Die Herstellungen der weiter oben genannten Klecksbilder können einen ersten Erfahrungsraum für den Begriff der Achsen- oder Spiegelsymmetrie geben. Ebenso kann dies auch die Behandlung mit Faltschnitten ermöglichen. An dieser Stelle muß allerdings darauf hingewiesen werden, daß es ein Nachteil dieser Vorgehensweise sein kann, weil die Spiegelung als Bewegung durch das Klappen den Raum mit einschließt. Eine Spiegelung wird jedoch vollständig in der Ebene definiert. Es muß im Unterricht dabei deutlich werden, daß das Klappen lediglich ein Hilfsmittel sei, um solche achsensymmetrischen Formen herzustellen bzw. sie zu überprüfen.

Die **Klecksbilder** und wie hier die Faltschnitte ermöglichen den Kindern einen Zugang zu dem mathematischen Verständnisses des Begriffs der Achsensymmetrie. Es kann allerdings auch als eine Weiterführung der zuvor intuitiv erworbenen Erfahrungen zum Begriff der Achsensymmetrie angesehen werden, denn Kinder haben schon in sehr frühem Alter Erfahrungen im Alltag mit der Achsensymmetrie gesammelt, wie z. B. beim Beobachten des menschlichen Körpers und etwa beim Zeichnen eines solchen.

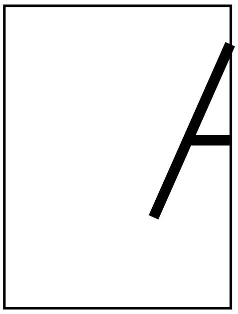
Für eine Aufgabe auf niedriger Anforderungsstufe soll hier nach Peter KIRSCHE[1] ein konkret-kinematisch Herstellungsverfahren durch Papier und Schere einer einfachen **achsensymmetrischen Faltfigur** vorgeschlagen werden. „Falten ist spannend. [...]. Denn Schülern macht es Spaß [...] wenn es um das Thema Falten geht“[2], und daher wollen sie schnell und gerne ausprobieren, was sich sonst noch alles an Formen und Figuren durch diese Tätigkeit herstellen lassen, wenn man ihnen zu Anfang ein anregendes Beispiel liefert. Die Kinder erfahren dabei auf anschauliche Weise, wie sich achsensymmetrische Figuren konstruieren lassen. Lernziel ist das Erkennen und Anwenden geometrischer Eigenschaften der Symmetrie. Es geht darum, zwei oder drei Symmetrieachsen (Faltlinien) zu finden, die jeweils nur für einen Teil der Figur maßgeblich sind. LÖRCHER[3] schlägt vor, z. B. zu prüfen, welche Buchstaben unseres Alphabets Symme-

[1] 1996, S. 9

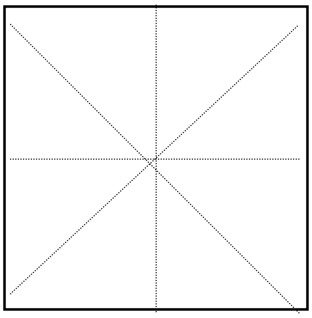
[2] ROOS, 1997,S. 5

[3] 1976, S. 203

trieachsen haben bzw. wieviel sie haben und welche Buchstaben gar keine haben. Lernziele sind u.a.: Erkennen von Achsensymmetrie bei (abstrakten) Figuren und mit Hilfe der Faltmethode, eine Definition finden und bemerken, daß die gleiche Figur mehrere Symmetrieachsen haben kann. Ebenso wie bei den Figuren als auch bei den Buchstaben kann jeweils das Blatt Papier zunächst gefaltet und dann nur eine Hälfte des Bildes oder Zeichens auf die eine Seite aufgemalt werden und anschließend ausgeschnitten werden. Der Faltschnitt ergibt dann die andere zweite Hälfte. Die Eigenschaft der Symmetrieachse ist darin direkt erfahrbar, daß Bild und Spiegelbild aufeinanderfallen.



Es bieten sich zum Basteln mit Papier und dem Faltschnittgedanken eine Vielzahl von Möglichkeiten, wenn man die Anzahl der Faltungen (Klappungen) erhöht. Das geht wiederum auf unterschiedlicher Weise. So kann man z. B. ein quadratisches Blatt Papier in der Mitte falten, dann um $90^0$ nach rechts oder links drehen (dieser Vorgang müßte in einer Grundschulklasse allerdings vorgeführt werden) und dann wieder in der Mitte falten. Diesen Vorgang so oft wie gewünscht wiederholen oder schon jetzt die gegenüberliegenden Ecken aufeinanderfalten, also eine Diagonale falten. Als Ergebnis sieht das wieder aufgefaltete quadratische Blatt Papier wie folgt aus:



Faltet man es wieder nach dem o. g. Schema wieder zusammen und schneidet dann vielleicht ein wenig daran herum, kann man wunderschöne Sterne entdecken. Abgesehen davon, daß man nun für immer wissen sollte, wie man zu Weihnachten die schönen gleichmäßigen Sterne konstruieren kann, bekommt man dadurch auch Einblicke in die Konstruktionen von symmetrischen Figuren die ein Drehzentrum und zwei oder mehr Symmetrieachsen haben.

Zeichnung
vom Stern falten

Zur Weihnachtszeit bietet sich das Projekt *Sterne basteln* zum Experimentieren mit den Ausgangsfiguren Quadrat und Kreis an. Ein anderes Projekt wäre die Kinder anzuregen z. B. *Tischdeckchen* für die Eltern als Geschenk zu bestimmten Anlässen herzustellen. Dabei kommt es ganz auf die Kreativität der Kinder an, weil hier kaum irgendwelche Vorgaben gemacht werden brauchen. Denn grundsätzlich bei den Faltarbeiten gilt die Behauptung von DIENES/GOLDING: „Es kann nicht stark genug betont werden, daß die Kinder hier, wie immer, selbst Erfahrung sammeln sollen und daß der der Lehrer möglichst wenig interferieren sollte, selbst wenn das Kind nur sehr wenig zustande bringt.“[1] Lediglich die eine oder andere Anregung sollte hier ggf. geliefert werden, die sich auf die Variation der Faltprinzipien beziehen. Z. B. gibt es den Unterschied zwischen dem stetigen Halbieren eines Streifen Papiers ohne es zwischen den einzelnen Faltvorgängen zu drehen (Diese Technik liegt den fraktalen Drachenkurven zugrunde) und dem stetigen Vorwärts/Rückwärts-Falten (Harmonikafaltung) eines solchen Streifen Papiers.

## 7.9 Experimentieren mit Faltkörpern u. - figuren

### 7.9.1 Vorbemerkung

Die mit Abstand wohl schönste Art des Papierfaltens ist das Konstruieren und das Darstellen von raumgreifenden Modellen und Figuren. Fast sämtliche solcher Figuren sind offiziell auch der Origamikunst untergeordnet. Für den motivationsorientierten Einstieg sind Beispiele solcher Figuren in Kap. 7.6.1 schon genannt worden. Die große eindrucksvolle Wirkung dieser Bastelarbeiten bleibt wohl auch noch jedem Erwachsenen in Erinnerung, der als Kind die Entdeckung gemacht hat, daß man aus einem einfachen Bogen Papier einen Hut und sogar ein Schiff herstellen (darstellen) kann. Daß diese mit Freude auch bemalt wurden, bedarf hier kaum noch einer Erwähnung. Schon bald wollen die Kinder wissen, was man sonst noch alles aus Papier falten kann.

### 7.9.2 Methodische Überlegungen

Nach dem Prinzip des entdeckenden Lernens sollen auch hier keine kleinschrittigen Faltanleitungen durch den Lehrer grundsätzlich empfohlen werden. Die Kinder sollen vielmehr angeregt werden, mit ihrem geringen Kontingent an Wissen über Papierfalten

[1] DIENES/GOLDING, 1969, S. III/16

schon selber neue Figuren zu konstruieren. Zu Anfang könnte der Vorschlag gemacht werden, daß sie sich auf die suche begeben sollen, um neue Schiffsmodelle zu erfinden, da man als Reeder ja schließlich welche zum Transport für Passagiere, für Tiere, für Autos oder welche für Containerfracht braucht.

Nach einer Idee von RADATZ U. A.[1] für das zweite Schuljahr sollen die Kinder **mit Längen experimentieren**. Dazu ist es notwendig, daß man ihnen unterschiedlich großes Papier zur Verfügung stellt. Die Kinder sollen erste Erfahrungen mit den Veränderungen von Längen in Papierfliegern und Papierschiffen machen. Dazu werden vorab drei Faltanleitungen für ein Schiff, einen Flieger und einen Dampfer geliefert. Die drei Figuren können dann mit quadratischem (für den Dampfer) bzw. rechteckigem Papier (für das Schiff und den Flieger), das von den Kindern abgemessenen wurde, gefaltet werden. Anschließend sollen dann die fertigen Figuren vermessen werden (Länge und Höhe der Figuren). Die Ergebnisse können zur Verdeutlichung in Tabellen eingetragen werden. Dabei können die Kinder beobachten, wie sich die Veränderung der Größe der Ausgangsfigur auf die Größe des gesamten bzw. auf die Größe von Teilen des Faltproduktes auswirkt. Wenn die Seiten der Ausgangsformate dann auch noch ‘glatte’ Maße haben (5, 10, 20, 30, 40, 50cm) besteht sogar die Möglichkeit, daß die Kinder dabei Regelmäßigkeiten entdecken.

Nach dem Vorschlag, der im ***Zahlenbuch***[2] für das 2. Schuljahr gemacht wird, soll hier ein Projekt genannt werden, bei dem die Kinder sich durch eine Faltanleitung arbeiten müssen und am Ende, wenn alles fein säuberlich gefaltet wurde, ein **Würfel** konstruiert wurde. Dieser Würfel ist seit einigen hundert Jahren Bestandteil der Origamikunst. Seit wann es diesen Würfel schon genau gibt, ist wohl nicht mehr nachzuvollziehen.

---

[1] 1998, S. 148ff

[2] BERGER, 1997, S. 50 (Schulbuch für die Grundschule, an dessen Herstellung MÜLLER und WITTMANN beteiligt waren)

Faltanleitung

Würfel

WOLLRING[1], der sich ebenfalls mit diesem Origami-Würfel (Sonobe-Würfel) beschäftigt hat, stellt in seinen Vorschlägen dar, daß es noch zwei leicht veränderte Faltkonstruktionen gibt, die zu Würfel führen, die diesem o. g. sehr ähnlich sind. Seiner Meinung nach sollten die Kinder nicht unbedingt als erstes mit dem Problem des Konstruierens dieser Würfel angeregt werden, sondern mit dem Zerlegen solcher (Hier ist die Vorarbeit des Lehrers gefragt). Die Problemstellung könnte dann lauten, daß die Kinder versuchen

[1] 1997, S. 25ff

sollen andere Möglichkeiten der Konstruktion zu finden. Das kann am Anfang auch an den zerlegten Würfelteilen geschehen, indem man sie wieder auf andere Weise zusammenfaltet.

Um den in Verstehen von Faltanleitungen ungeübten Schüler eine Hilfe zu geben, könnte dieses Vorhaben in Stationen aufgeteilt werden. Der Schüler begibt sich nach jedem einzelnem Faltschritt an die nächste Station und faltet dort anhand der Anleitung und einer vorgefalteten Figur, die die Figur nach dem an dieser Station zu vollziehenden Faltschritt zeigt (Kontroll- bzw. Rückmeldefunktion), den nächsten Faltschritt. Nach dem Letzten Faltschritt erhält er eines der sechs notwendigen Seitenteile, die am Ende, wenn er sie alle fertig gefaltet hat, zu einem Würfel zusammengesteckt werden.
Ein etwas anderer Ansatz ist, wenn jeder Schüler sich durch die ihm komplett gebotene Faltanleitung durcharbeiten muß. (Im extremen Fall geschieht dieses in Einzelarbeit bei den sehr geübten Schülern, aber gegenseitiges Helfen sollte man nicht untersagen, wenn mit der Herstellung solchen Figuren noch keine größeren Erfahrungen gemacht worden sind.). Die Schüler müssen in selbständiger Auseinandersetzung mit der Faltanleitung herausfinden, daß es eine Reihenfolge der Faltschritte gibt (eigentlich leicht zu erkennen an der Durchnumerieren) und das es Sinn macht, diese auch einzubehalten. Die Schüler werden feststellen, daß die sechs Teile genau gleich aussehen müssen, also genau gleich konstruieren müssen, damit sie am Ende auch zu einem schönen und nicht zu einem schiefen ‘Würfel’ zusammengesteckt werden können. Auf konstruktive und handlungsorientierte Weise erfahren die Schüler einen besonderen Körper, dem man anschließend den Namen Würfel gibt. Sie haben dabei auch ganz nebenbei einen Teil seiner Eigenschaften kennengelernt: Er besteht aus sechs gleichen Seitenteilen, die wiederum jeweils vier gleich lange Seiten haben (die Taschen und Laschen könnten diese Einsicht vielleicht behindern, denn man muß sie sich wegdenken.).

Ein anderes Projekt mit einem sehr beeindruckenden Ergebnis soll hier genannt werden. Der Grundgedanke ist hier nicht wie zuvor das Quadrat und der Würfel, sondern das gleichseitige **Dreieck** und der **Tetraeder**. Udo ROOS[1] hat dafür ein Beispiel mit folgender Faltanleitung veröffentlicht, das hier im Ganzen wiedergegeben werden soll:

Faltanleitung

Tetraeder

Udo Roos

Hierbei können die Kinder die z. B. Erfahrung machen, daß es ein Körper gibt, der aus einem Streifen Papier konstruiert werden kann (ob das mit anderen Körpern auch geht, gilt herauszufinden), daß er nur aus (gleichseitigen) Dreiecken besteht und daß er wie der Würfel, egal auf welche Seite man ihn stellt, immer gleich aussieht. Der Lehrer sagt den Kindern dann, daß man diesen Körper als Tetraeder bezeichnet. Interessant ist fest-

[1] 1997, S. 5

zustellen mit welchen Papierformaten der Ausgangsform sich sonst noch dieser Tetraeder falten läßt. Z. B. ist das mit einer quadratischen Ausgangsform nicht möglich.

Diese Bastelarbeiten zwingen die Kinder zu einer Arbeitshaltung, bei der sie die Faltkonstruktionen systematisch durcharbeiten. Es ist nicht möglich Faltschritte zu überspringen oder auszulassen. Oft ist nicht zu erkennen, daß die am Anfang notwendigen Faltschritte unbedingt notwendig sind, damit am Ende die gewünschte Figur entsteht. Erscheint am Anfang der eine oder andere Faltschritt dem ungeduldigen Schüler noch als lästig, wird er beim letzten Faltschritt hoffentlich feststellen, daß dieser ein vorbereitender Teil seiner Konstruktion war. Läßt man ihm die Möglichkeit, auszuprobieren, was passiert, wenn man eine der zu Anfang als vielleicht unnötig erscheinende Faltlinie einfach wegläßt, um z. B. noch schneller die Figur entstehen zu lassen, wird er einsehen, daß dieses schrittweise Vorgehen einen Sinn macht, und er am Ende mit der gewünschten Figur belohnt wird.

### 7.9.3 Die höhere Papierfaltkunst in Origami

Selbstverständlich kann man hier noch auf die vielen **komplizierten** **Origami-Figuren** näher eingehen, doch sind sie für Grundschulkinder im Geometrieunterricht meines Erachtens von nicht so großer Bedeutung, da die Konstruktion dieser Objekte teilweise schwer nachzuvollziehen sind bzw. die Abbildungen und Anweisungen eine gehörige Portion Vorkenntnisse und Übung benötigen. Um die in einer Vielzahl von Origamibüchern dargestellten Faltanleitungen dennoch mit Grundschülern nachvollziehen zu können, bietet sich aber immer noch das Stationsfalten als ein Mittel an, das wohl mehreren Kindern einer Klasse gleichzeitig ein Erfolgserlebnis ermöglicht. Interessant ist in der Origamikunst, daß sämtliche Figuren aus einer geringen Anzahl von Grundformen entstehen. Nach diesen Grundformen sind die Figuren auch unterteilt. Sie können von den Kindern erlernt werden, obwohl diese allein nicht viel Freude bereiten. Das Falten dieser Figuren wird Kindern von SAKODA[1] nicht empfohlen, da nach seinen Erfahrungen diese Beschäftigung demotivierende Wirkung auf sie hat. LÖRCHER[2] kann sich vorstellen, daß Schüler, die gerne feinmotorisch arbeiten, sich diesen Anforderungen stellen könnten.

## 7.10 Experimentieren mit Körpernetze

### 7.10.1 Vorbemerkung

Dieser Themenbereich bietet interessante Erfahrungen mit den Eigenschaften von Körpern über ihre jeweiligen Netze. Dem Konstruieren von Schachteln und sonstigen geometrischen Körpern kann ein Entfalten bzw. Auseinanderfalten solcher Körper als Umkehroperation entgegengesetzt werden.

### 7.10.2 Methodische Übelegungen

Um sich einen Zugang auf niedrigerer Anforderungsstufe zu Körpernetzen zu verschaffen, bieten sich die letztere Version als die etwas günstigere an. Hier können die Kinder aufgefordert werden, zu Hause Schachteln jeder Art zu sammeln und diese mit in den Geometrieunterricht zu bringen. Den Kindern wird gezeigt, was mit der Schachtel passiert, wenn man die Klebestellen (sofern diese vorhanden sind) vorsichtig löst. Andere Schachteln werden entlang einiger Kanten eingeschnitten. Anschließend werden sie auseinandergeklappt und glatt gestrichen. Nun werden diese Netze begutachtet und vielleicht auf einem Blatt Papier  liegend mit einem Stift umrandet. Danach müssen dann von den Kindern die Faltlinien wieder eingezeichnet werden, damit die einzelnen Sei-

[1] 1984,S. 9

[2] 1996, S.29

tenteile des ursprünglichen Körpers wieder sichtbar sind. Die Kinder sollen herausfinden, ob (und dafür benötigt man eine Schachtel in möglichst hoher Stückzahl) sich mehrere Möglichkeiten für die Form eines Netzes ergeben, das durch unterschiedliches Aufschneiden der Schachteln entsteht. Als besonders geeignet werden sich die Schachteln herausstellen, die aus nur einem einzigen Stück Papier, Pappe oder Karton hergestellt worden sind.

Anhand vorgegebener oder sogar selbstentworfener Körpernetze sollen die Kinder versuchen durch Überlegen und dann durch zunächst Ausschneiden und anschließendem Falten überprüfen, ob und was für Körper sich daraus konstruieren lassen[1]. Dabei gewinnen die Kinder Einsichten darüber, z. B. aus wieviel Seiten bestimmte Körper bestehen, was die Seiten für Formen haben (können), daß bestimmte Seitenverhältnisse innerhalb der jeweiligen Körper bestehen und daß man die Körper auch nach der Anzahl ihrer Ecken unterteilen kann.

## 7.11 Kopfgeometrie

### 7.11.1 Vorbemerkung

Zentraler Gedanke der Kopfgeometrie ist laut Peter Herbert MAIER, „daß die Aufgabe ausschließlich ‘im Kopf’ gelöst wird. Zur Bearbeitung dürfen weder spezielle Modelle erstellt noch entsprechende zeichnerische Darstellungen angefertigt werden.“[2] Um derart Leistungen vollbringen zu können, müssen Grundschulkinder zuvor, folgt man PIAGETs Auffassung, „daß unser Denken auf der Verinnerlichung von gegenständlichen Handlungen basiert“[3], beim handlungsorientierten und experimentellen Einsatz von Modellen im Geometrieunterricht entsprechende Erfahrungen gesammelt haben.

---

[1] Der Auer-Verlag bietet hierzu ein umfassendes Programm ***Geometrie begreifen***, in dem Bastelbögen mit Körpernetzen zur Konstruktion enthalten sind.

[2] MAIER, 1996, S. 276

[3] Ebenda,.

### 7.11.2 Methodische Übelegungen

In einigen zuvor genannten Situationen mußten die Kinder z. T. schon einfache Denkaufgaben lösen, wie etwa bei dem Herstellen von Symmetriefiguren bei den Faltschnitten. Dort durfte allerdings noch mit Material gearbeitet werden, um die Überlegungen zu überprüfen bzw. solche überhaupt in Gang zu setzen.
Das einmal gefaltete Blatt Papier bietet hier ein niedriges Einstiegsniveau. An ihm sollen einfache Schnitte vollzogen werden. Die Kinder kommen durch reine Denkaktivität zu den Lösungen, wie das geöffnete Blatt Papier anschließend aussieht. Zu Anfang können mehrere Vorschläge mitgeliefert werden, so daß der Schüler sich die richtig heraussuchen muß. Diese Aufgabe ist nicht rein kopfgeometrisch gelöst worden. Die Ausgangssituation und die Lösungsmöglichkeiten wurden anschaulich (visuell) dargestellt, was den Einstieg in diesen Bereich erleichtert. Eine Verlagerung zu rein sprachlich gestellten kopfgeometrischen Aufgaben und anschließendem rein denkenden Lösen und sprachlichem Wiedergeben der Lösung ist anzustreben. Geometrische Bewegungen nur ‘im Kopf’ ausführen trainiert das räumliche Vorstellungsvermögen.

RADATZ/RICKMEYER[1] machen den Vorschlag, der als Einführung in kopfgeometrische Probleme gedacht sein kann, wobei ein Blatt Papier zu einem Buch gefaltet und als nächstes die vier Ecken des Buches abgeschnitten werden sollen. Bevor das Buch wieder aufgeklappt und die entstandenen Schnipsel gezählt worden sind, sollen die Kinder versuchen, die Anzahl der entstandenen Teile nur durch reine Überlegung zu ermitteln. Ein weiterer Schritt ist, wenn die Kinder bestimmen sollen, welche Form die entstandenen Teile besitzen.

[1] 1991, S. 85

# 8 GESAMTBETRACHTUNG

Leider bleiben mir noch viele Fragen offen, da sich für mich keine Gelegenheit geboten hat, eine Unterrichtseinheit, in der Papier gefaltet wurde, durchzuführen. Interessant wäre es für mich zu wissen, was für Vorkenntnisse die Grundschüler nun tatsächlich in bezug auf Bastelarbeiten mit Papier besitzen. In Anbetracht der veränderten Kindheit bestehen hier sicherlich sehr große Unterschiede zwischen den Kindern.

Auf dem Hintergrund der Forderung, daß es Aktivitäten für den Unterricht zu entwickeln gilt, deren Ziel es ist, elementarste geometrische Erfahrungen zu sammeln, wobei einfache problemhaltige Situationen im Mittelpunkt stehen, ist das Papierfalten eine sinnvolle Beschäftigung. Ein falscher Eindruck wäre entstanden, wenn die Tätigkeit des Papierfaltens allein eine sinnvolle Beschäftigung für Grundschulkinder sei, um geometrische Einsichten kognitiv zu erfassen (Dies kann schon allein aufgrund des Prinzips der Variation der Veranschaulichungsmittel nicht empfohlen werden). Das Papierfalten in exemplarischen Problemstellungen kann zwar auf anschaulichem Wege zu Einsichten führen, aber für eine intellektuelle Denkentwicklung der Kinder bleibt es notwendig, daß sie sich immer wieder von den konkreten Handlungen, so weit es erlaubt, distanzieren. Manuelles Tun ist zwar die Voraussetzung, um später zu einem denkenden Handeln im Sinne von PIAGET fähig zu sein, dabei sollen die Schüler aber zunehmend versuchen, bei dem Nachvollziehen von Handlungen, sich ausschließlich bildlichen und symbolischen Mitteln zu bedienen. Das kann beim Lernen durch Papierfalten gewährleistet werden, weil dabei die Repräsentationsebenen von BRUNER berücksichtigt werden können. BRUNER fordert nämlich, daß ein Lernstoff in dieser Entwicklungsstufe der Grundschüler, wie bereits dargestellt, auf der enaktiven Ebene erfahren werden muß, dessen Verinnerlichung aber durch Behandlung auf der ikonischen (dazu eignen sich Abbildungen und Zeichnungen von Faltvorgängen) und symbolischen (z. B. verbale Anleitungen) Ebene unterstützt werden kann.

Die Kinder in der Grundschule befinden sich beim Papierfalten in einer Situation, in der sie **handelnd mit Material Probleme lösen** und dabei Produkte herstellen können. Die gesellschaftlichen Anforderungen verlangen vom menschlichen Denken dabei Flexibilität als eine wichtige Qualifikation. Daher ist er erforderlich die Schüler dort auch hinzuführen. Die Frage, ob die Entdeckungsmethode den Schüler durch die Beschäftigung mit dem Papierfalten soweit befähigen kann, daß er sich eine selbständige, problemlösende Arbeitshaltung zu eigen machen kann, hängt im weiten Sinne davon ab, ob er sich zum Papierfalten überhaupt motivieren läßt und ob ihm die Unterrichtssituationen genügend Raum für Kreativität, bezüglich der Organisation des Lernprozesses, und für Entfaltungen seiner Interessen und Neugierde.
Bei den noch so durchdachten Faltanleitungen der Autoren ist es meist trotzdem ein Problem, das erwünschte Produkt zu erhalten. Hier gilt es, die Schüler mit den Problemstellungen nicht zu überfordern, was sehr schnell bei den etwas schwächeren Schülern der Fall sein kann. Viel der Kinder benötigen bei schon etwas schwierigeren Faltanleitungen Hilfe (gelenkt-entdeckendes Lernen), damit sie tatsächlich lernen, die Anleitungen systematisch zu durchforschen bzw. durzucharbeiten und durch geeignetes Probieren die Lösungen zu erhalten. Mit zunehmender Übung gelingt dieses auch immer leichter. Selbst ich habe festgestellt, daß ich höchst komplizierte Faltkonstruktionen zu lösen vermochte, erst nachdem ich mich mit einfacheren Konstruktionen beschäftigt hatte.
Ein anderer Weg ist es, wenn sich der Schüler der Herausforderung stellt, selbst Papierfaltprodukte zu erfinden. Dabei kann er mit vorher angeeigneten Kenntnissen z. B. versuchen, andere Konstruktionen für einen Papierflieger zu suchen. Auch bietet sich das Thema der Weihnachtssterne an, um neue interessante Formen zu entwickeln. Hierbei setzt er angeeignetes Wissen strategisch ein, um zu Lösungen zu kommen.

Mit Papierfaltexperimenten lassen sich die Kinder handelnd auf Tätigkeiten ein, bei denen geometrisch Gesetze eine Rolle spielen. Man kann für einige Begriffe Vorbereitungen treffen, die dann aber immer noch einer Nachbereitung bedürfen. Die Mittellinie in einem Quadrat durch Falten zu ermitteln ist ein Unterfangen, daß äußerste Geschicklichkeit benötigt, wenn man deren Richtigkeit auch nach der Prüfung mittels millimetergenauer Messung feststellen will. Und da liegt auch schon das Problem: Ob die Faltlinie eine Mittellinie ist oder nicht hängt beim Falten von der Beurteilung ab. Dabei kommt entweder das Auge oder das Messen zum Tragen. Entscheidend ist aber vielmehr, daß ein Verständnis von dem Begriff Mittellinie entwickelt wird. Und dazu ist es eben wichtig, daß dieser Begriff eben auch mittels der Sprache definiert wird und nicht nur durch das Falten und das Begucken. Denn die Interpretation einer Faltlinie bei einem Quadrat, daß sie Mittellinie ist, beginnt mit dem Falten, bei dem die zwei Eckenpaare mit den jeweils gegenüberliegenden Eckenpaaren zur Deckung kommt (wie präzise dieses auch immer vorgenommen wurde). Definiert man, daß dieses gelungen ist, ist somit auch gleichzeitig die dabei entstandene Faltlinie als Mittellinie definiert.

Es ist sicherlich richtig, daß die Kinder beim Konstruieren und vor allem beim Erfinden von Papierfaltfiguren geometrische Gesetze berücksichtigen. Daß es aber auch gleichzeitig Einsichten darüber sind ist nicht zwangsläufig. Die Aufmerksamkeit der Kinder muß in vielen Situationen auf solche geometrischen Tatsachen gelenkt werden. Dieses kann z. B. dadurch geschehen, indem man Ergebnisse in bestimmten Organisationsformen zusammentragen oder durch geschicktes Hinterfragen nach Antworten suchen läßt. Eine Möglichkeit bei Faltschnitten ist, wie ich in Kap. 7.8.2 schon darauf hingewiesen habe, die Ergebnisse Gruppen zuzuordnen, um bewußt zu machen, daß es Unterschiede bezüglich der Symmetrieeigenschaften von Figuren gibt.

Bis zur Selbständigkeit und dem kritischen Denker ist es aber ein weiter Weg, weil sich dieses Ziel nur über einen lang angelegten Prozeß verwirklichen läßt, der über die Grundschulzeit hinaus geht.

## Anmerkung

Diese Arbeit ist nach den Regeln der deutschen Rechtschreibung *vor* der Rechtschreibreform 1996 geschrieben.

# LITERATURVERZEICHNIS


AEBLI, Hans: *Das operative Prinzip.* In: *Mathematik lehren*, Jg. 1985, H. 11, S. 4-6.

AUSUBEL, David P.; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen: *Psychologische und pädagogische Grenzen des entdeckenden Lernens.* Aus: Neber (Hrsg.): *Entdeckendes Lernen*. Weinheim und Basel (Belz) 1981, S. 30-44.

BAUERSFELD, Heinrich: *Drei Gründe, Geometrisches Denken in der Grundschule zu fördern.* Aus: Beiträge zum Mathematikunterricht 1992. Hildesheim (Franzbecker) 1993, S. 7-34.

BAUERSFELD, Heinrich: *Grundschul-Stiefkind Geometrie.* In: *Die Grundschulzeitschrift*, 7. Jg. (1993), H. 62, S. 8-11.

BECKSTEIN, Marga: *Moeglichkeiten der Foerderung kreativen Denkens im operativ-konstruktiven Geometrieunterricht durch Problem- und Handlungsorientierung.* In: *Blätter für Lehrerfortbildung*, 38. Jg. (1986), H. 10, S. 366-369.

BERGER, Albert; MÜLLER; WITTMANN: *Das Zahlenbuch: Mathematik im zweiten Schuljahr.* Leipzig (Klett) 1997.

BESUDEN, Heinrich: *Knoten, Würfel, Ornamente. Aufsätze zur Geometrie in Grund- und Hauptschule.* Stuttgart (Klett) 1984.

BESUDEN, Heinrich: *Handbuch mit Handlungsanweisungen für die Verwendung von Arbeitsmitteln im Geometrieunterrich.* Osnabrück (Wenner) 1988.

BLUME, Monika; BURGGRAF, Christl: *Erstes Papierfalten.* Ravensburg (Ravensburger) 1995. (= Ravensburger Bastelbär.)

BRUNER, Jerome S.: *Der Akt der Entdeckung*. Aus: Neber, Heinz (Hrsg.): *Entdeckendes Lernen*. Weinheim und Basel (Belz) 1981, S. 15-29.

*Der Brockhaus: in fünf Bänden.* Mannheim (F. A. Brockhaus) 1993.

NIEDERSÄCHSISCHE KULTUSMINISTER (Hrsg.): *Rahmenrichtlinien für die Grundschule - Mathematik.* Hannover (Schroedel Schulbuchverlag GmbH) 1984.

DIENES, Zoltan Paul; GOLDING, Edmond Wiliam: *Die Entdeckung des Raumes und praktische Meßübungen. 2. Aufl.* Freiburg (Herder) 1969. (= Mathematik - Unterricht 3)

FLOER, Jürgen: *Fördernder Mathematikunterricht in der Grundschule. Probleme und Beispiele unter besonderer Berücksichtigung schulschwacher Kinder*. Aus: Floer, Jürgen und Haarmann, Dieter (Hrsg.): *Mathematik für Kinder* (=Beiträge zur Reform der Grundschule, Bd. 50) Frankfurt a. M., 1982, S. 35-150.

FLOER, Jürgen: *Geometrie und Umwelterschließung im Mathematikunterricht.* In: *Grundschule*, Jg. 1987, H. 10, S. 52-55.

FLOER, Juergen; FORTHAUS, Reinhard: *Falten im Geometrieunterricht der Grundschule.* In: *Grundschule*, 23. Jg. (1991), H. 2, S. 24-26.

FOSTER, John: *Entdeckendes Lernen in der Grundschule. 2. veränderte und aktualisierte Auflage von Günter Neff.* München (Ehrenwirth) 1993.

FREUDENTHAL, Hans: *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Stuttgart (Klett Studienbücher) 1973. (Bd. 2)

FREUDENTHAL, Hans: *Geometrie in der Grundschule.* Aus: Steiner, Hans-Georg; Winkelmann, Bernard (Hrsg.): *Fragen des Geometrieunterricht. Untersuchungen zum MU* Köln (Aulis Verlag Deubner & Co. Kg.) 1981. (=IDM) S. 87-98.

GEHWEILER, Udo: *Zum Geometrieunterricht in der Primarstufe.* Aus: Padberg, Friedhelm (Hrsg.): *Beiträge zum Lernen und Lehren von Mathematik. Festschrift zur Emeritierung von Martin Glatfeld.* Hannover (Kallmeyer'sche Verlagsbuchhandlung) 1994. S. 43-59.

GLASERFELD, Ernst von: *Radikaler Konstruktivismus.* Frankfurt a. M. (Suhrkamp) 1998.

GRAUMANN, Günter: *Entdeckendes Lernen im Geometrieunterricht.* Aus: Padberg, Friedhelm (Hrsg.): *Beiträge zum Lernen und Lehren von Mathematik. Festschrift zur Emeritierung von Martin Glatfeld.* Hannover (Kallmeyer'sche Verlagsbuchhandlung) 1994. S. 60-74.

GUDER, Rudolf: *Geometrie in der Grundschule.* Hildesheim (NLI) 1991. (= NLI-Berichte / Niedersaechsisches Landesinstitut fuer Lehrerfortbildung, Lehrerweiterbildung und Unterrichtsforschung <Hildesheim>. 44)

HAUBOLD, Hanna: *Lebendiger Geometrieunterricht.* In: *Grundschule*, 26. Jg. (1994), H. 9, S. 64.

HAYEN, Jürgen (Hrsg.); MARKERT, D.; MELLIN, E.: *Einfache geometrische Begriffe.* Tübingen (Beltz) 1975. (= Mathematik für Grundschullehrer. E 16)

HENN, Hans-Wolfgang: *Geometrische Basteleien.* In: *Mathematik lehren*, Jg. 1994, H. 64, S. 14-21.

HILTON, Peter; PEDERSEN, Jean: *Symmetrie und die Konstruktion regulaerer Polygone.* In: *Der Mathematikunterricht*, 42. Jg. (1996), H. 2, S. 46-56.

HOLLAND, Gerhard: *Geometrie für Lehrer und Studenten. Kongruenzgeometrie. 1* Hannover (Schroedel) 1974.

HOMANN, Gerhard: *Geometrie ist wichtig, aber.* In: *Grundschule*, 23. Jg. (1991), H. 2, S. 8.

HOMANN, Gerhard: *Geometrie - Opfer notwendiger Kürzungen?* In: *Grundschule*, Jg. 1996, H. 3, S. 8.

HUZITA, Humiaki.: *Understanding Geometry through Origami Axioms.* Aus: Smith, J. (Hrsg.): *Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET 91)*, (British Origami Society) 1992. S. 37-70.

JANK, Werner; MEYER, Hilbert: *Didaktische Modelle. 4. Aufl.* Berlin (Cornelsen) 1994.

KIRSCHE, Peter: *Zum Herstellen spiegelsymmetrischer und punktsymmetrischer Figuren im Unterricht der Primarstufe.* In: *Der Mathematikunterricht*, 42. Jg. (1996), H. 2, S. 5-13.

KÜHL, Reinhard: *Wir falten. Aus der Werkecke. 5* In: *Grundschule*, 15. Jg. (1983), H. 12, S. 40-42.

LAUTER, Josef (Hrsg.); HOLE, Volker; UHR, Hermann; FEIL, Sophie; ZITTERBART, Eduard: *Der Mathematikunterricht in der Grundschule. Didaktisch-methodische Hilfen f. d. U.-praxis* Donauwörth (Ludwig Auer) 1978. (= EXEMPLA. 16)

LAUTER, Josef: *Fundament der Grundschulmathematik. Paedagogisch- didaktische Aspekte des Mathematikunterrichts in der Grundschule.* Donauwoerth (Auer) 1991.

LAUTER, Josef: *Methodik der Grundschulmathematik. 7. Aufl.* Donauwörth (Auer) 1995.

LEUTENBAUER, Helmut: *Geometrieunterricht in der dritten und vierten Jahrgangsstufe. Beispiele fuer den schueler- und sachgerechten Aufbau von Unterrichtsstunden.* In: *Blätter für Lehrerfortbildung*, 37. Jg. (1985), H. 10, S. 387-390.

LÖRCHER, Christa; LÖRCHER, Gustav Arnold (Hrsg.): *Konkrete Mathematik in der Grundschule.* Stuttgart (Ernst Klett) 1975. (= Nuffield Mathematikprojekt.1)

LÖRCHER, Christa; LÖRCHER, Gustav Arnold (Hrsg.): *konkrete Mathematik in der Grundschule.* Stuttgart (Ernst Klett) 1976. (= Nuffield Mathematikprojekt. 2)

LÖRCHER, Gustav Adolf: *Darf man in Mathematik basteln?* In: *Praxis Schule 5 - 10*, 7. Jg. (1996), H. 3, S. 28-33.

LUCIO, Rene; SPÜTZ, Jan: *Das große Origamibuch.* Ravensburg (Ravensburger) 1997. (= Hobby-Bücher)

MAIER, Peter Herbert: *Kopfgeometrie - Handlungsorientierte und visuelle Aufgabenstellungen.* In: *Mathematik in der Schule*, 34. Jg. (1996), H. 5, S. 276-284.

MAIER, Peter Herbert: *Ist räumliches Vorstellungsvermögen trainierbar?* In: *Grundschule*, Jg. 1996, H. 3, S. 9-11.

MATURANA, Humberto R.; VARELA, Francisco J.: *Der Baum der Erkenntnis. Biologische Wurzeln menschlichen Erkennens.* Bern, München (Goldmann) 1984.

MEYENBERG, Rüdiger: *Schule und Recht in Niedersachsen. Eine Sammlung der wichtigsten Rechts- und Verwaltungsvorschriften.* Hannover (Hahn) 1996. (= Hahn: Schulpraxis)

MEYER, Hilbert: *Unterrichtsmethoden. 2: Praxisband. 5. Aufl.* Frankfurt a. M. (Cornelsen Scriptor) 1993.

MEYER, Hilbert: *Leitfaden zur Unterrichtsvorbereitung. 12. Aufl.* Berlin (Cornelsen Scriptor) 1980. (= Scriptor Ratgeber Schule. 6)

MEYER, Hilbert: *Unterrichtsmethoden. 1: Theorieband. 6. Aufl.* Frankfurt a. M. (Cornelsen Scriptor) 1994.

MÜLLER, Gerhard; WITTMANN, Erich Christian: *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe.* Braunschweig (Vieweg & Sohn) 1977.

NEFF, Günter: *Einführung zur deutschen Ausgabe.* Aus: Foster, John: *Entdeckendes Lernen in der Grundschule. 2. veränderte und aktualisierte Auflage von Günter Neff.* München (Ehrenwirth) 1993. S. 7-26.

NEUMANN, Ute; WEGERICH, Monika: *Unsere Kinder koennen gut sehen - wir sollten diese Faehigkeiten erhalten.* In: *Grundschulunterricht*, 40. Jg. (1993), H. 1, S. 27-28.

Verband Bildung und Erziehung (Harsum) (Hrsg.): *Niedersächsisches Schulgesetz.* Harsum 1996.

OTT, Heinz-K.: *Zum lernpsychologischen und entscheidungstheoretischen Hintergrund der Gesaltung von Lehrstrategien.* Aus: Gönner, K.; Reip, H. (Hrsg.): *Unterrichtsplanung für kaufmännische Schulen. Einführung in die Theorie und Praxis des Unterrichts. 2. durchgeseh. Aufl.* Bad Homburg vor der Höhe, Berlin, Zürich (Gehlen) 1979. S. 155-188.

PEARL, Barbara Elizabeth: *Math in Motion: Origami in the Classroom. 5. Aufl.* Nashua, New Hampshire (Delta Education Inc.) 1995.

PROKSCH, Ruth: *Geometrische Propädeutik.* Göttingen (Vandenhoeck & Ruprecht) 1956.

RADATZ, Hendrik: *Die Geometrie nicht vernachlaessigen.* In: *Grundschule*, 21. Jg. (1989), H. 12, S. 17-19.

RADATZ, Hendrik; RICKMEYER, Knut; EBELING, Astrid; DRÖGE, Rotraut: *Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr.* Hannover (Schroedel) 1996.

RADATZ, Hendrik; RICKMEYER, Knut; EBELING, Astrid; DRÖGE, Rotraut: *Handbuch für den Mathematikunterricht. 2. Schuljahr.* Hannover (Schroedel) 1998.

RADATZ, Hendrik; RICKMEYER, Knut: *Handbuch fuer den Geometrieunterricht an Grundschulen.* Hannover (Schroedel) 1991.

RADATZ, Hendrik; SCHIPPER, Wilhelm: *Handbuch fuer den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Hannover (Schroedel) 1983.

REIP, Hubert: *Problemorientierter Unterricht am Beispiel der Volkswirtschaftslehre.* Aus: Gönner, K.; Reip, H. (Hrsg.): *Unterrichtsplanung für kaufmännische Schulen. Einführung in die Theorie und Praxis des Unterrichts. 2. durchgeseh. Aufl.* Bad Homburg vor der Höhe, Berlin, Zürich (Gehlen) 1979. S. 189-194.

RICKMEYER, Knut: *Handlungserfahrungen im Geometrieunterricht. Anregungen aus d. Praxis.* In: *Grundschule*, 18. Jg. (1986), H. 4, S. 44-47.

RIEDEL, Klaus: *Lehrhilfen zum entdeckenden Lernen. Ein experimenteller Beitrag zur Denkerziehung.* Hannover (Schroedel) 1973. (= Empirische Forschungen zu aktuellen pädagogischen Fragen und Aufgaben.)

ROOS, Udo: *Geometrie: Stiefkind oder Chance der Grundschulmathematik.* In: *Grundschulmagazin*, 11. Jg. (1997), H. 2, S. 4-6.

ROTH, Heinrich: *Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens. 9. Aufl.* Hannover, Berlin, Darmstadt, Dortmund (Schroedel) 1966.

RÜHLE, Anja: *Wir falten einen Zoo. Unterrichtsvorschlag für den Geometrieunterricht im vierten Schuljahr.* In: *Praxis Grundschule*, 20. Jg. (1996), H. 2, S. 24-25.

SAKODA, James Minoru: *Origami. Papierfalten für Anfänger, Kenner und Könner. 2. Aufl.* München (Hugendubel) 1884.

SCHERER, Petra: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung.* Heidelberg (Winter) 1995.

SCHRÖDER, Eberhard M.: *Geometrie euklidischer Ebenen. Mathematischer Grundlegungen der Schulgeometrie.* Paderborn (Schöningh) 1985.

SCHRÖDER, Max; KUCHENBECKER, Walter; WIESE, Ilse; WURL, Bernd: *Orientierung Mathematik 5. Schuljahr. Mathematisches Unterrichtswerk für Orientierungsstufen.* Hannover (Schroedel Schulbuchverlag) 1989.

SCHUETTE, Sybille: *Mathematik entdecken auf eigenen Wegen.* In: *Die Grundschulzeitschrift*, 8. Jg. (1994), H. 72, S. 6-9.

SCHWARTZE, Heinz: *Geometrie.* Bochum (Kamp) 1984. (= Elementarmathematik aus didaktischer Sicht. 2)

SCHWARTZE, Heinz; FRICKE, Arnold: *Grundriß des mathematischen Unterrichts. 7. Aufl.* Bochum (Kamp) 1983. (= Praktische Pädagogik. 30/31)

SMITH, J. (Hrsg.): *Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET 91)* o.O. (British Origami Society) 1992.

VOLLRATH, Hans-Joachim (Hrsg.): *Geometrie. Didaktische Materialien für die Hauptschule.* Stuttgart (Klett) 1982.

VOLLRATH, Hans-Joachim: *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht.* Stuttgart (Klett) 1984.

WEBER, Wofgang: *Inkommensurabilitaet von Seite und Diagonale im Quadrat - Visualisierung durch Papierfalten.* In: *Praxis der Mathematik*, 37. Jg. (1995), H. 5, S. 200-203.

WERGE, Christian: *Alte und neue Faltkonstruktionen.* In: *Mathematik lehren*, Jg. 1990, H. 42, S. 34-36.

WINTER, Heinrich: *Was soll Geometrie in der Grundschule?* In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 8. Jg. (1976), H. 1, S. 14-18.

WINTER, Heinrich: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Heinrich Besuden zum 60. Geburtstag.* In: *Grundschule*, Jg. 1984, H. 16, S. 26-29.

WINTER, Heinrich: *Mathematik entdecken. Neue Ansaetze für den Unterricht in der Grundschule.* Frankfurt, Main (Scriptor) 1987. (= Lehrer-Bücherei. Grundschule)

WINTER, Heinrich: *Lernen durch Entdecken?* In: *Mathematik lehren*, Jg. 1988, H. 28, S. 6-13.

WINTER, Heinrich: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung fuer die Paedagogik.* Braunschweig u.a. (Vieweg) 1989.

WINZEN, Werner: *Geometrie und Umwelt.* In: *Grundschulunterricht*, 41. Jg. (1994), H. 9, S. 2-5.

*Wir falten.* In: *Praxis Grundschule*, Jg. 1983, H. 6, S. 19-24.

WITTMANN, E.rich Christian: *Grundfragen des Mathematikunterrichts. 6. neubearb. Aufl.* Braunschweig (Vieweg) 1981.

WITTMANN, Erich Christian: *Mathematisches Denken bei Vor- und Grundschulkindern. Eine Einführung in psychologisch-didaktische Experimente.* Braunschweig (Vieweg) 1982.

WITTMANN, Erich Christian: *Vom Tangram zum Satz von Pythagoras.* In: *Mathematik lehren*, Jg. 1997, H. 83, S. 18-20.

WITTMANN, Erich Christian; MÜLLER, Gerhard N.: *Handbuch produktiver Rechenübungen. 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins.* Stuttgart (Klett) 1990.

WITTMANN, Erich Christian; MÜLLER, Gerhard N.: *Handbuch produktiver Rechenübungen. 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen.* Düsseldorf (Klett) 1997.

WOLLRING, Bernd: *'Man darf auch nicht immer sofort aufgeben, wenn's mal nicht klappt. ' Mädchen und Jungen bauen gemeinsam Würfel aus gefaltetem Papier.* In: *Sache, Wort, Zahl*, 25. Jg. (1997), H. 7, S. 2, 25-28, 33-39, 59.

ZECH, Friedrich: *Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitung für das Lehren und Lernen von Mathematik. 3. Aufl.* Weinheim u.a. (Beltz) 1981. (= Beltz Grüne Reihe)

ZEITLER, Herbert: *Der Tod der Geometrie.* In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 13. Jg. (1981), S. 9-12

ZUEHLKE, Burkhard: *Ueber Papierfaltfolgen und Drachenkurven zu Methoden der Fraktalen Geometrie.* In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 50. Jg. (1997), H. 1, S. 10-15.

## ERKLÄRUNG

Ich bin damit einverstanden, daß die von mir gefertigte Hausarbeit mit dem Thema

**Aktiv-entdeckendes Lernen beim Papierfalten**
**im Geometrieunterricht der Grundschule**

zur Einsicht durch andere Personen zur Verfügung gestellt wird. Ich habe auch keine Bedenken, daß meine Hausarbeit Interessenten ausgeliehen wird. Mir ist bekannt, daß eine Ausleihe erst 5 Jahre nach Ablauf des Kalenderjahres möglich ist, in dem mir das endgültige Ergebnis der Prüfung mitgeteilt worden ist.

Hiermit versichere ich, daß ich die Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Oldenburg, 1. November 1998