Sascha von Engelmann
Lehreranwärter
Ausbildungsseminar Oldenburg

Oldenburg, den 28.09.2001

Unterrichtsentwurf

zur Zweiten Staatsprüfung
für das Lehramt an Grund- und Hauptschulen

(gemäß § 17 PVO - Lehr II)

Prüfungsunterricht 2

Fach:	**MATHEMATIK**
Datum:	28.09.2001
Zeit:	9.45 – 10.30 Uhr (3.Stunde)
Klasse:	**4b** (11 Mädchen, 11 Jungen)
Fachlehrer:	
Fachseminarleiter Mathematik:	
Seminarleiter Pädagogik:	
Schulleiter:	
Prüfungsvorsitzender:	

Thema der Unterrichtseinheit:	Strukturierte Mengen: Einführung in die Kombinatorik.
Thema der Unterrichtsstunde:	**Der Zoo der Streifenhunde – eine kombinatorische Fragestellung** (Variationen mit Wiederholung)

Inhaltsverzeichnis

1 Stellung der Stunde in der Einheit

1. – 3. Stunde:	Erste Auseinandersetzungen mit einfachen kombinatorischen Fragestellungen im Lernen an Stationen (Entwicklung erster Lösungshilfen).
4. Stunde:	<u>Exkurs Teil 1:</u> Hasenfamilie Braunweiß - Einführung eines Baumdiagramms als ikonische Ordnungshilfe und Kontrollmöglichkeit.
5. Stunde:	<u>Exkurs Teil 2:</u> **Der Zoo der Streifenhunde – eine kombinatorische Fragestellung** (Variation mit Wiederholung).
6. – 7. Stunde:	Vertiefende kombinatorische Fragestellungen im Lernen an Stationen (Anwenden der Lösungshilfen, insbesondere des Baumdiagramms).

2 Lernziele

Groblernziel

Die Schüler sollen erkennen, dass ein Baumdiagramm in der Auseinandersetzung mit kombinatorischen Fragestellungen, zur Ermittlung der Lösungen ein das Problem zu vereinfachendes Mittel (Schema) sein kann.

Feinlernziele

Die Schüler sollen ...

<u>affektiv</u>:

- am Beispiel einer gegebenen Menge ein Gefühl für die Kombinationsmöglichkeit ihrer Elemente entwickeln, indem sie zunächst die möglichen Kombinationen schätzen und diese anschließend durch enaktives Modellieren und ikonischer Darstellung kontrollieren.
- Partnerarbeit als sinnvolle Arbeitsform empfinden, indem sie diese als Unterstützung für ihren Lernprozess erfahren,

<u>kognitiv</u>:

- die Modellierung der Streifentiere erkennen, indem sie die Demonstrationen am Material nachvollziehen,
- erkennen, dass das bloße Schätzen nicht immer zum exakten Ergebnis führt, indem sie ihre Schätzungen durch Kontrollen (Modellierung, Baumdiagramm) vergleichen,
- erkennen, dass die gesamte Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten von Elementen einer Menge allein mit Hilfe des Baumdiagramms zu ermitteln ist, indem sie dieses durch enaktives Modellieren von Kombinationsmöglichkeiten überprüfen,
- intuitiv erfahren, dass das enaktive Modellieren mit konkretem Material für das Lösen kombinatorischer Fragestellungen seine Grenzen hat,
- ihre Kombinationsfähigkeit sowie das systematische Zählen weiterentwickeln, indem sie das Baumdiagramm als Ordnungs- und Strukturierungshilfe zur Lösung kombinatorischer Aufgaben verwenden.

sozial:

- ihre Sozial- und Selbstkompetenz erweitern, indem sie selbständig und sorgfältig mit einem Partner arbeiten und gewissenhaft ihre Arbeiten – wenn auch zunächst intuitiv - kontrollieren,
- lernen, rücksichtsvoll miteinander umzugehen (Mitschüler in der Partnerarbeit bzw. bei der Bearbeitung der Aufträge weder stören, noch bedrängen oder irritieren), indem sie Rückmeldung über ihr Verhalten erhalten,
- lernen, sich kooperativ zu verhalten, (z.B. sich bei Bedarf Hilfe suchen bzw. anderen Schülern Hilfe anbieten), indem sie erfahren, dass das gemeinsame Arbeiten an Aufträgen Vorteile verschafft bzgl. der Herabsetzung des Schwierigkeitsgrades eines Auftrages,
- Achtung vor den Lernchancen der Mitschüler entwickeln, indem sie den Nutzen des Lernstoffs erkennen und Rückmeldung über ihr Verhalten in Bezug auf die Mitschülern erhalten.

psychomotorisch:

- mit gegebenem Material sachgerecht umgehen können, indem sie dieses nur dann als Unterstützung zur Lösung des Problems erfahren.

Längerfristige Lernziele

Die Schüler sollen durch die selbständige problemorientierte Arbeit mit einem Partner und anhand konkreten Materials ...

- Freude in der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten und somit eine positive Einstellung zum Fach Mathematik entwickeln,
- ihr Problemlöseverhalten und ihre Lösungsstrategien weiterentwickeln,
- lernen, sich eine beliebige Fertigkeit oder eine beliebige Thematik weitestgehend selbständig anzueignen,
- lernen, die Bearbeitung gewissenhaft durchzuführen und ihre Ergebnisse selbst zu kontrollieren,
- lernen, sich Quellen der Information und Hilfe zu erschließen und diese produktiv bezüglich der Aneignung einer Thematik zu nutzen.

3 Vorbemerkungen zur Lerngruppe

Seit Beginn des Schuljahres (2000/2001) unterrichte ich eigenverantwortlich in der Klasse 4b wöchentlich fünf Stunden Mathematik. Darüber hinaus unterrichtete ich im vorangegangenen Schuljahr zwei Stunden Schwimmen (im 1.Halbjahr) und eine zusätzliche Stunde „Computer-Kurs“ (im 2.Halbjahr). Diese Klasse setzt sich aus 22 Schülern zusammen (11 Mädchen, 11 Jungen), die im Alter von neun bis elf Jahren sind.
Seit Beginn dieses Schuljahres ist aaaaa aufgrund von Wohnungswechsel in diese Klasse neu hinzugekommen.
Das allgemeine Klassenklima ist durch eine freundliche und hilfsbereite Atmosphäre gekennzeichnet. Kollegen übernehmen außerordentlich gerne Vertretungsstunden in dieser Klasse.

Das **Sozialverhalten** aller Schüler ist nach meiner Einschätzung als äußerst positiv zu bezeichnen. Die Klassengemeinschaft ist stark und es herrscht bis auf wenige Ausnahmen ein ebenfalls sehr gutes Zusammengehörigkeitsgefühl. Während des Unterrichts bereitet lediglich Niklas der Gemeinschaft hin und wieder immer noch Probleme dadurch, dass er Mitschüler ablenkt oder sich unangemessen in den Mittelpunkt stellt, womit er mehr Aufmerksamkeit des Lehrers als die übrigen Schüler einfordert. Üblicherweise lenkt er bei Interventionen seitens der Lehrkraft ein und verhält sich kooperativ.
Seit Beginn der zweiten Hälfte des letzten Schuljahres ist Iiiii in die Klasse neu hinzu gekommen. Iiiii wiederholte die dritte Klasse. Zwischenzeitlich war Iiiii im Kinderschutzzentrum Oldenburg untergebracht. Mittlerweile wohnt er mit seiner Mutter und seinem Bruder im Einzugsgebiet Bürgeresch. Das starke Zusammengehörigkeitsgefühl hat Iiiii zunächst vor große Probleme gestellt, da er sich aufgrund seiner Situation und seines Verhaltens von den anderen Schülern erheblich unterscheidet: Zum Verhängnis wurde ihm anfangs trotz seiner eher zurückhaltenden und ruhigen Art, dass er mehrmals des Diebstahls beschuldigt bzw. sogar überführt worden ist. In Zusammenarbeit mit den Schülern dieser Klasse konnte für Iiiiis Situation allmählich Verständnis aufgebracht und er teilweise in die Gemeinschaft integriert werden.
Das Verhältnis zwischen den Schülern und mir bezeichne ich als ausgesprochen gut. Mittlerweile verstehen wir uns in vielen Situationen, ohne uns dabei der Sprache bedienen zu müssen (Das gilt für die Verständigung in beide Richtungen!).

Arbeitsverhalten

Die allgemeine Arbeitsatmosphäre betrachte ich als sehr angenehm für die Schüler und auch für mich als Lehrer. Da Stillarbeitsphasen im Klassenraum im Mathematikunterricht von mir nur dosiert eingesetzt werden, fallen Schüler, die eventuell Ruhe weniger ertragen können und chronisch stören würden, wenig auf. Schüler, die dennoch in Ruhe und/oder alleine die Angebote oder ihre Aufträge bearbeiten wollen, dürfen sich bei Beachtung eines eng gefassten Reglements in den Gruppenraum oder an die Tische vor dem Klassenraum zurückziehen.

Eine Begeisterung für kombinatorische Fragestellungen konnte bislang bei allen Schülern während der ersten vier Stunden dieser Einheit beobachtet werden. Darüber hinaus lässt sich ebenso sagen, dass der Großteil der Schüler dieser Klasse sich mittlerweile gerne mit dem Lösen von Problemen nahezu jeder Art auseinandersetzt. Selbst fffff, Ppppp, Sssss und Ooooo, die dazu neigen, sich bei rein arithmetischen Themen gelegentlich schon etwas zurückzuziehen und häufig nicht alle Aufgaben schaffen, wenn der Lernstoff qualitativ in die Tiefe geht, setzen sich mit den Problemen mit gesteigertem Engagement konstruktiv auseinander, wenn das Vorgehen nahezu offen gehalten wird und ein Experimentieren und Ausprobieren ermöglicht. Dieser Effekt wird dadurch verstärkt, sobald die Unterrichtsthematik etwas Neues bietet oder/und handelnden Umgang mit Materialien ermöglicht. Dennoch haben einige Schüler hin und wieder damit Probleme, selbständig und ausdauernd zu arbeiten. Hilfreich für die heutige Thematik ist die hohe Bereitschaft zum Tüfteln und Knobeln bei einem Großteil der Schüler.
Ttttt und Iiiii haben mit derartigen Lernangeboten allerdings häufig Schwierigkeiten: Wenn sie nicht konkret gesagt bekommen, wie sie eine Aufgabe angehen bzw. diese Lösen sollen, verweigern beide nahezu vollständig, wenn ich ihnen nicht entweder den Lernstoff auf weitaus niedrigerem Niveau anbiete (Vereinfachen) oder ihnen das Verfahren zur Lösung vormache. Aufgrund der aktuellen Situation von Iiiii (seine Mutter ist mit der Bewältigung ihres Alltags und der Betreuung ihrer Kinder völlig überfordert!) fehlt er sehr häufig im Unterricht, erledigt keinerlei Hausaufgaben und kann der Thematik des Unterrichts, wenn er denn anwesend ist, kaum folgen, was nicht unbedingt auf seine intellektuellen Fähigkeiten, sondern vielmehr auf seine psychische Belastung hinweist. Kontakte (Gespräche) mit der Mutter, dem Jugendamt, dem Schulpsychologen, sowie der Polizei (aufgrund neuer schwerwiegender Verdächtigungen bzgl. des Diebstahls) fanden statt und werden auch weiterhin aufrecht erhalten.

Leistungsstand

Die Klasse besteht aus einem großen Teil leistungsstarker Schüler und einem „nach unten" dünner werdenden schwächeren Teil. Grundsätzlich haben Iiiii und Ttttt Schwierigkeiten, selbständig zu arbeiten und sind häufig auf Hilfe angewiesen. Aufgrund seiner aktuellen familiären Situation (er hat in den letzten Tagen seinen Vater zum ersten Mal kennen gelernt) hat ddddd in seinen Leistungen stark nachgelassen.

Die Anforderungen der heutigen Stunde richten sich in etwa an das mittlere Maß der Leistungsstärke. eeeee, Rrrrr, Kkkkk, bbbbb und ccccc sind den leistungsstärksten Schülern zuzuordnen, denn sie arbeiten sehr zügig und benötigen kaum Hilfe seitens des Lehrers und verlangen bzw. erhalten oft Zusatzaufgaben. Darüber hinaus werden diese Schüler von mir immer häufiger dazu angeleitet, anderen Schülern – vor allem den o.g. schwächeren Schülern - bei Bedarf zu helfen, wobei sie nicht die Aufgaben der Bedürftigen lösen, sondern sie dabei unterstützen sollen.

Lernvoraussetzungen

In den ersten drei Unterrichtsstunden dieser Einheit haben sich die Schüler anhand des Lernens an Stationen mit verschiedenen einfachen Problemen z.T. ihres Alltags aus den Bereichen Permutation, Kombination und Variation auseinandergesetzt. Dabei war die Vorgehensweise zur Ermittlung der Lösungen größtenteils offen gehalten. Die Schüler hatten sich dabei mit konkretem Material und zeichnerischen bzw. bildlichen Darstellungen auf z.T. sehr kreativer Art weitergeholfen und zu den Lösungen vorangetastet. Da die Probleme für den größten Teil der Schüler recht überschaubar waren, konnte auf das Baumdiagramm verzichtet werden. Die Schüler gelangten zwar z.T. über Umwege, aber letztlich doch über Gespräche in den Reflexionsphasen zu brauchbaren (korrekten) Ergebnissen. In der vierten Stunde wurde anhand einer weiteren kombinatorischen Fragestellung das Baumdiagramm eingeführt. Hier sollten in Anlehnung an MÜLLER / WITTMANN (1995, S. 159) alle möglichen Variationen „dreigeteilter" Hasen ermittelt werden. Ich muss allerdings davon ausgehen, dass in der heutigen Stunde kaum Schüler das Baumdiagramm als Ordnungshilfe zur Ermittlung der Anzahl der möglichen Variationen einsetzen werden, da es noch längst nicht alle Schüler verinnerlicht haben. Vielmehr werden sie sich, wie zuvor mit der Beantwortung der kombinatorischen Frage, auf individuelle Art auseinandersetzen.

4 Überlegungen zur Sache

Die „**Elementare Kombinatorik**“ kann als Teilbereich der Stochastik betrachtet werden. Sie untersucht, auf welche und auf wie viele verschiedene Arten Elemente einer endlichen Menge ausgewählt und angeordnet werden können. Hierbei wird unterschieden, ob die Reihenfolge der Elemente berücksichtigt wird oder nicht und ob ein Element ein- oder mehrmals ausgewählt werden darf.

Jede Zusammenstellung von $k \leq n$ aus n vorliegenden Dingen $a_1, a_2, ..., a_n$, den Elementen einer gegebenen Menge $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ nennt man eine Auswahl. Grundtypen der Auswahl sind *Permutationen* (Anordnungen), *Kombinationen* und *Variationen* (vgl. MEYERS LEXIKONREDAKTION, Bd. 5, S. 347). Zusammenstellungen von Elementen, bei denen die Reihenfolge irrelevant ist, heißen Kombinationen; solche, bei denen es auf die Reihenfolge der Elemente ankommt, heißen Variationen (vgl. LINDENAU / SCHINDLER, S. 27f).

Bei Variationen ohne Wiederholungen dürfen sich die Elemente eines Tupels nicht wiederholen. Da es sich in der vorliegenden Unterrichtsstunde um die Zusammenstellung eines Tupels von 4 Elementen (Körperteile) aus einer Menge von 2 Elementen (Farben) handelt, müssen die Elemente der Menge der Farben sich zwangsläufig wiederholen. Diese **„Variationen mit Wiederholungen** von n Elementen zur k-ten Klasse sind geordnete k-Tupel (also mit Berücksichtigung der Reihenfolge), gebildet mit den Elementen des k-fachen kartesischen Produkts A^k von A. Es gibt n^k solche Variationen.“ (vgl. BROCKHAUS, Bd. 3; S. 188). Wenn z.B. aus zwei Farben (n = 2) nun drei Körperteile zusammengesetzt werden sollen, also $A = \{r, w\}$[1], k = 3, dann gibt es die Variationen rrr, rrw, rww, wwr, wrr, rwr, wrw, www ($n^k = 2^3 = 8$ Variationen)

Die Anzahl der k-Tupel, kann mit Hilfe der sog. **Grundregel des Zählens** der Kombinatorik (Produktregel) leicht ermittelt werden: „Wenn eine Folge von Entscheidungen zu treffen ist, bei der es für die erste Entscheidung p Möglichkeiten, für die zweite Entscheidung q Möglichkeiten, für die dritte Entscheidung r Möglichkeiten gibt, usw., dann gibt es für die Folge aller Entscheidungen $p \cdot q \cdot r$ ... Möglichkeiten.“ (Panknin, S. 36). In der vorliegenden Unterrichtsstunde handelt es sich bei zwei parallel gestellten Fragestellungen, um jeweils eine Zusammenstellung von 2 bzw. 3 Elementen (Bausteine) aus einer Menge von 3 bzw. 2 Elementen (Farben). Am konkreten Beispiel bedeutet dies bzgl. der Streifenhunde, dass z.B. die Farben rot und weiß an jeder der drei Stellen des Tieres (Kopf, Vorderteil, Hinterteil) unabhängig voneinander vorkommen dürfen

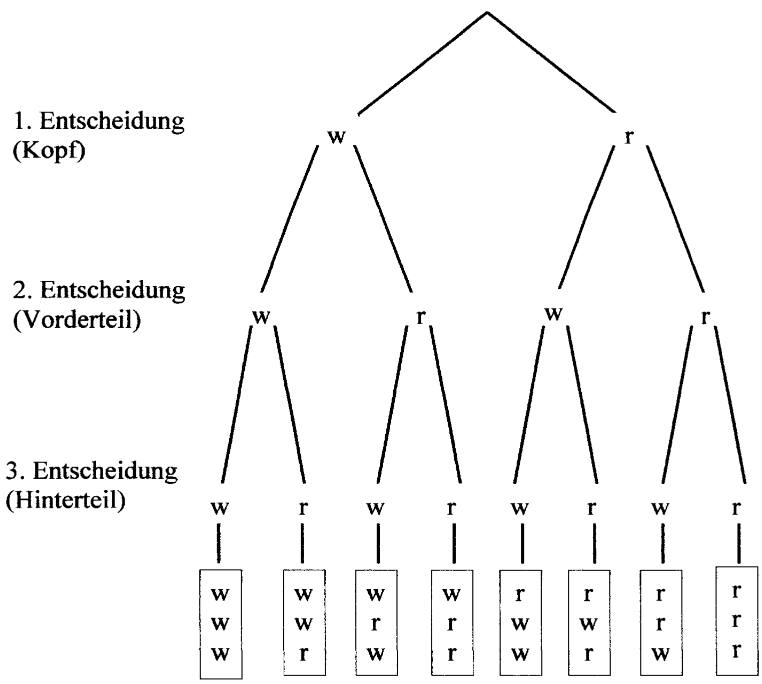
[1] r = rot, w = weiß

und sich daraus $2 \cdot 2 \cdot 2$ ($= 2^3$) = 8 Möglichkeiten (verschieden aussehende Streifenhunde) ergeben. Die zwei Bausteine der Streifenschafe können ihre Farben jeweils aus einer Menge von drei Elementen wählen (rot, weiß, blau). Daraus ergeben sich $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ Möglichkeiten.

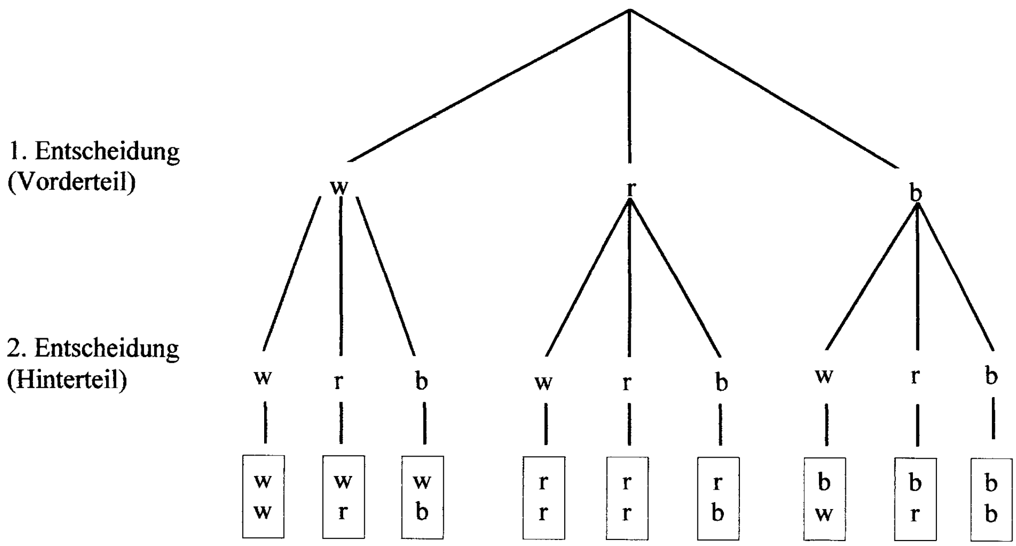
In der vorliegenden Stunde soll eine Menge analysiert und strukturiert werden, und zwar zunächst durch Modellierung am konkreten Material und anschließend mit Hilfe eines **Baumdiagramms**. In der Topologie versteht man unter einem Baum einen Streckenkomplex (Graph, Liniensystem), in dem zwischen zwei Verbindungspunkten immer nur eine Verbindung besteht, also kein „Rundweg" möglich ist. (Schmidt, S. 153). Werden die Elemente einer Menge nach einem solchen Schema geordnet, so erscheinen sie in einer streng gesetzmäßigen Reihenfolge an den Zweigspitzen des Baumes. Der Baum stellt somit ein grundlegendes Ordnungs- und Orientierungsschema dar, das in vielen mathematischen Bereichen verwendet werden kann. Das Baumdiagramm kann dabei als Ordnungshilfe und zur Strukturierung für ein systematisches Zählen und gleichzeitig als ikonische Kontrollmöglichkeit für die ermittelte Anzahl der Tupel (Variationen) eingesetzt werden – letzteres dann, sofern eine Lösung auf enaktivem Wege bereits bestimmt worden ist.

Für die Lösungen der heutigen zentralen Aufgabenstellungen (Aufg. 1 und 2) würden sich folgende Baumdiagramme ergeben (siehe auch A3: Geplantes Tafelbild):

<u>Aufgabe 1: „Streifenhunde"</u>



Aufgabe 2: „Streifenschafe“



(Aus Platzgründen entspricht in den dargestellten Tupel der obere Buchstabe dem Vorderteil und der untere dem Hinterteil des Streifenschafes).

(Aus Platzgründen entspricht in den dargestellten Tupel der obere Buchstabe dem Kopf, der mittlere dem Vorderteil und der untere dem Hinterteil des Streifenhundes).

Wenn die aus LEGO-Steinen gebauten Tiere auf ihren „Füßen“ stehen, sind ihre einzelnen Bauelemente zwar horizontal angeordnet, was für ein Baumdiagramm mit Leserichtung „von links nach rechts“ sprechen würde. Da ich bei Bedarf aber die einzelnen Tiere an den Zweigspitzen abstellen und nicht nur zeichnen möchte, und dieses nur entweder auf der Tafeloberkante oder der -ablage möglich ist, habe ich mich für die Leserichtung „von oben nach unten“ entschieden.

5 Didaktische Überlegungen

In allen Bereichen des täglichen Lebens müssen immer wieder Probleme jeglicher Art gelöst werden. Auch Kinder sind mit der Lösung kleinerer oder größerer Probleme in ständiger Auseinandersetzung. Selbst kombinatorische Probleme (Fragestellungen) finden sich in der **Lebenswelt** der Kinder: Sei es z.B. bei der Zusammenstellung von Kleidungsstücken, bei der Auswahl von Gerichten einer Speisekarte oder von Wörtern zu Sätzen bzw. beim Bilden von (Spiel-) Gruppen u. Paarungen. PANKNIN weist allerdings darauf hin, dass der Sinn der Behandlung kombinatorischer Fragestellungen in der Grundschule nicht die Erarbeitung der elementaren

Theorie dieses Bereiches sein kann. „Vielmehr wollen wir die Schüler unter Rückgriff auf bereits vorhandene Erfahrungen zum Nachdenken über wichtige Umwelterscheinungen anregen.“(1972, S. 9).
Die Entwicklung eines Problemlöseverhaltens ist u.a. Aufgabe und Ziel des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Er soll „dem Schüler ermöglichen, in seiner Umwelt Zusammenhänge zu erkennen, zu beschreiben und zur Lösung von Problemen geeignete Wege zu suchen.“ (**NRRL**[2], S. 5). Wenn Unterrichtszeit vorhanden ist, können Fragestellungen u.a. aus dem Bereich der Kombinatorik dazu verwendet werden. (NRRL, S. 10).

Die **Bedeutung**, die der Behandlung mit kombinatorischen Fragestellungen in der Grundschule zukommt, liegt u.a., wie oben bereits erwähnt, weniger in der fachwissenschaftlichen Durchdringung, sondern vielmehr in der Weiterentwicklung der intellektuellen Fähigkeiten und der allgemeinen **Lernziele** des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Nach WINTER sind darunter die Entwicklung der Fähigkeiten wie Argumentieren, Kreativität, Mathematisieren und der geistigen Grundtechniken Klassifizieren, Ordnen, Generalisieren u. Konkretisieren, Analogisieren und Formalisieren (in LAUTER, S. 44ff) zu verstehen. Die Auseinandersetzung mit kombinatorischen Fragestellungen ermöglicht „die Entwicklung strategischen bzw. problemlösenden Denkens, das für die weiterführende Schule und die Wettbewerbsfähigkeit auf dem heutigen Arbeitsmarkt notwendig ist. Nicht reproduktives Denken ist gefragt, sondern die kreative Verknüpfung bekannter Regeln zur Lösung einer Aufgabe, eines Problems“ (BOESE, S. 4).

Da sich die **Denkentwicklung** der Schüler dieser Klasse nach PIAGET im „Stadium der konkreten Operationen“ (ZECH, S. 92ff; vgl. auch LAUTER [1997], S. 13ff [„Stufentheorie“]) befindet, darüber hinaus sie nach AEBLI (ZECH, S. 96ff) durch die Erziehungsbedingungen (Reifung, Übung und Erfahrung, soziale Wechselwirkungen, Ausgleich von Unzulänglichkeiten der Intelligenz) mitbestimmt wird und nach BRUNER sich „gleichzeitig auf verschiedenen Darstellungsebenen“, die in starker Wechselbeziehung zueinander stehen“ (ZECH, S. 104ff, vgl. auch LAUTER [1997], S. 67ff) vollzieht, ist es unabdingbar, die Schüler in Situationen zu bringen, in denen sie sich gerade mit konkretem Material bzgl. des Lernstoffs auseinandersetzen können (*konkrete Stufe*). Doch damit sich Handlungen / Operationen überhaupt letztendlich verinnerlichen können, müssen, nach AEBLI (ZECH, S. 97f), Aktivitäten auf der *figuralen* und auch auf der *symbolischen* Stufe vollzogen werden (*operative Durcharbeitung*) und Verknüpfungen innerhalb der Reprä-

---

[2] Abkz. f. Niedersächsische Rahmenrichtlinien, Hrsg.: DER NIEDERSÄCHSISCHE KULTUSMINISTER.

sentationsformen hergestellt werden. Das bedeutet also, dass der Lernstoff, nach BRUNER, nicht nur auf der *enaktiven*, sondern auch auf der *ikonischen* und *symbolischen* Ebene präsentiert werden muss.

Es ist mir daher besonders wichtig, dass die Schüler nicht einfach Wissen von mir, dem Lehrer, übermittelt bekommen, sondern das sie eigenaktiv den Lernstoff in Beziehungen erleben. Darunter verstehe ich primär nicht, dass ich den Schülern einfach sage, wie die Dinge sind bzw. funktionieren, sondern Situationen zu gestalten, in denen der Lernstoff in der Art aufbereitet ist, dass in der Auseinandersetzung mit ihm, die Schüler z.B. Strukturen oder Gesetzmäßigkeiten (Regeln) nach Möglichkeit weitestgehend selbständig entdecken können. Denn gerade „der Mathematikunterricht hat wesentlichen Anteil am Entwicklungs-, Lern- und Erziehungsprozess der Schüler“ (NRRL, S. 5). Das bedeutet zwar, dass u.a. dieses Vorgehen mehr Zeit in Anspruch nimmt oder man weniger im Unterricht mit „spektakulären Ergebnissen“ zu rechnen hat. Dagegen steht aber die Auffassung, auf diese Weise tiefgreifendere Erkenntnisse bzgl. der Sinnzusammenhänge zu erzielen, und langfristig die Denkentwicklung bzw. Verhaltensdisposition der Schüler maßgeblich zu beeinflussen (vgl. WITTMANN, 1992, S. 162ff). Dabei berücksichtigen sämtliche Inhalte dieser Einheit die BRUNERschen *Repräsentationsebenen* des Lernstoffs. Setzen die Schüler sich mit dem Lernstoff allerdings vornehmlich auf *enaktiver* und *ikonischer* Ebene auseinander, so werden sie spätestens, wenn nicht schon in Gesprächen mit einem Partner, in der jeweiligen Auswertungsphase einer Unterrichtsstunde mit der *symbolischen* Repräsentationsform konfrontiert.

Die **Behandlung kombinatorischer Fragestellungen** betrachte ich für Grundschüler insofern als geeignet und wichtig, weil sie o.g. Ziele durch Tätigkeiten wie Legen als aktives Zuordnen von homogenen, teilstrukturierten und strukturierten Materialien, zeichnerisches Zuordnen durch Strichverbindungen, Anfertigen von Strichlisten, Ausfüllen von Tabellen usw. erlauben. In der heutigen Stunde werden die Schüler zunächst in einer recht offen gehaltenen Experimentierphase allmählich ein systematisches Vorgehen individuell und selbständig zur Ermittlung der Anzahl der Streifenhunde entwickeln. Da die Schüler das Baumdiagramm noch längst nicht verinnerlicht haben, gehe ich davon aus, dass nur wenige der Schüler dieses als Ordnungshilfe nutzen wird. Ich erwarte vielmehr, dass die Schüler mit Hilfe des konkreten Materials, indem sie die einzelnen Tiere in Partnerarbeit modellieren, diese dann vergleichen und ordnen, versuchen, die Lösung zu ermitteln.

Da neben der Ermittlung des Ergebnisses der kombinatorischen Fragestellungen zunächst die Vermittlung der Strukturen und die Glaubwürdigkeit des Baumdiagramms zur Unterstützung des

Lösungsprozesses erarbeitet werden soll, sehe ich es als notwendig an, dass die Schüler eine einheitliche Aufgabenstellung erhalten. Denn auf diese Weise können wir anhand eines ausgewählten Beispiels die Bedeutung und den Nutzen dieser ikonischen Hilfe in kürzester Zeit erarbeiten, um damit an weiteren vertiefenden Problemstellungen der Kombinatorik in der folgenden Unterrichtseinheit (im Lernen an Stationen) arbeiten zu können.

„Bei einer ganzen Reihe von Problemen [...] hängt die Bearbeitung ganz entscheidend davon ab, ob man in der Lage ist, sich einen Überblick über alle nur denkbaren Lösungsmöglichkeiten zu verschaffen.“ (PANKNIN, S. 9f). Ähnlich wie die Erarbeitung der normierten schriftlichen Rechenverfahren, denke ich, dass das **Baumdiagramm als ein geeignetes Ordnungsschema** für Grundschüler einer vierten Klasse angeboten werden kann, um Probleme dieser Art zu lösen. Zur Ermittlung der Anzahl der möglichen Variationen von den Tieren, die aus zwei Elementen bestehen (Streifenschafe u. –hunde), würde sich auf der zeichnerischen Ebene genauso gut (oder sogar besser?) eine einfache Tabelle eignen. Während des Lernens an Stationen war diese Möglichkeit von einigen Schüler auch bereits gewählt worden. Die Tabelle hat aber bei der Zusammenstellung von zwei Elementen ihre Grenze. Um sich einen Überblick bei Aufgaben verschaffen zu können, die die Zusammenstellung von mehreren Elementen verlangen, ist das Baumdiagramm ein nützliches Schema. Da es in dieser Stunde aber auf die Vermittlung der Glaubwürdigkeit dieses Lösungsweges ankommt, damit in späteren – komplexeren - Aufgaben auf das konkrete Material verzichtet werden kann, sollen zunächst die Probleme ein derartiges Ausmaß haben, so dass sie mit konkretem Material gelöst – überprüft - werden können. Aber jede andere Aufgabenstellung, als die in dieser Stunde gestellte, hätte die Überprüfbarkeit mit konkretem Material übermäßig erschwert, da eine wesentlich größere Menge an LEGO-Steinen notwendig gewesen wäre[3]. Somit haben die Schüler Gelegenheit, vollständige Baumdiagramme für einfache Fragestellungen zu erstellen, um somit ein Verständnis der Struktur dieses Schemas entwickeln.

Damit die Schüler die allgemeinen **Strukturen eines möglichen Baumdiagramms** allmählich erfassen, um dieses in weiteren Problemstellungen einsetzen zu können, sollen sie in der heutigen Stunde beim Erstellen zweier Baumdiagramme die wesentlichen Elemente (Stamm, Entscheidungspunkte, Äste, Zweige u. Zweigspitzen) und ihre Bedeutungen entdecken. Während sie in der vorangegangenen Stunde ein mögliches Baumdiagramm und seine einzelnen Elemente

---

[3] Die “nächstkleinere” Aufgabe: drei Elemente, drei Farben $\Rightarrow 3^3 = 27$ Variationen $\Rightarrow 27 \cdot 3 = 81$ LEGO-Steine in nur zwei Farben!

kennen gelernt haben, sollen sie heute Letztere anhand weiterer kombinatorischer Frage- bzw. Problemstellungen (Variationen mit Wiederholung) in Beziehungen zueinander erfahren (Anzahl der Elemente erhöht/verringert sich bzw. Anzahl der Farben erhöht/verringert sich.

6 Methodische Überlegungen

Das von mir gewählte methodische Konzept dieser Stunde beinhaltet kombinatorische Fragestellungen im Bereich der Variationen mit Wiederholung. Die Schüler sind gefordert, anhand von zwei parallel gestellten Aufgaben (zzgl. der Zusatzaufgabe, jeweils ein Baumdiagramm dazu zu erstellen) zu versuchen, ihre (Partner-) Arbeit mit dem Material so zu organisieren, dass sie sich am Ende einen Gesamtüberblick der beiden Mengen der jeweils möglichen Variationen verschaffen konnten.

In der **Einstiegsphase** werde ich die Schüler in den Stuhlkreis bitten und ihnen von der besonderen Rasse der Streifentiere berichten. Ich bin mir der Gefahr bewusst, dass gerade das Aufbauen extrinsischer Motivation durch Erzählen von Geschichten als Unterrichtseinstieg das Interesse an der Mathematik selbst verbauen kann. Die Problematik ist m.E. in diesem Fall jedoch nicht gegeben, da dies zum einen in der Klasse nur in sehr seltenen Fällen genutzt wird, und zum anderen nicht nur als Anfangsmotivation dienlich ist, sondern während der gesamten Unterrichtsreihe Impulse zum entdeckenden Lernen bietet. Somit kann sie nicht als Selbstzweck, sondern als Auslöser intrinsisch motivierter Schüleraktivitäten angesehen werden.

Zwei dieser Tiere (Streifenschaf und Streifenhund) werde ich den Schülern anhand einer Zeichnung zeigen (farblos) und ihnen von dem jeweiligen unterschiedlichen Aussehen dieser besonderen Tierarten berichten. An dieser Stelle werde ich mit DUPLO-Steinen jeweils einen der Hunde und eins der Schafe als Modell nachbauen. Die Modelle der Tiere werden die Schüler aus LEGO-Steinen bauen. Dabei wird jeweils ein Streifen mit einem einzelnen 2x4-Knopf-LEGO-Stein veranschaulicht. Die möglichen Farben hierfür werden in der jeweiligen Aufgabe vorgegeben. Ich werde jeweils die „rrr“ Hunde bzw. „rr“Schafe[4] modellieren und den Schülern die Exemplare demonstrieren. Ich wähle diese Variation, weil der Name „Streifen....“ die Gefahr in sich birgt, dass die Schüler eben genau diese Tiere (und bei den Hunden die „www“ bzw. bei den Schafen

[4] rrr = rot, rot, rot

die „ww“ und „bb“) in der darauffolgenden Erarbeitungsphase als ungültig bewerten, da diese Variationen nach ihrer Auffassung evtl. keine Streifen besitzen. Anschließend werden wir noch 1-2 weitere Tiere dieser beiden Sorten gemeinsam im Kreis bauen (von denen dann mindestens einer aus zwei Farben besteht und somit wenigstens einen Streifen besitzen könnte).

Wenn ich sicher davon ausgehen kann, dass alle Schüler in der Lage sind, diese Streifentiere aus Legosteinen bauen zu können, werde ich sie als nächstes mit dem Problem des Zoowärters als Ausgangspunkt konfrontieren, der nicht weiß, für wie viele Streifentiere er jeweils die vier Gehege bauen muss. Er weiß lediglich, dass viele verschiedene Streifentiere mit dem Zug unterwegs in seinen Zoo sind und dass jeweils alle Streifenhunde bzw. –schafe usw. unterschiedlich gefärbtes Fell haben sollen. Die Schüler sollen mit der Bearbeitung der Streifenhund und –schafe beginnen. Sind sie damit fertig, können sie sich mit den anderen Tieren auseinandersetzen. Die Arbeitsblätter hierfür werde ich an einem Buffet anbieten.
Diese zusätzlichen Aufgaben werden zur Differenzierung eingesetzt. Damit in der Auswertungsphase nahezu alle Schüler Ergebnisse präsentieren können und somit auch an der gemeinsamen Erarbeitung des Baumdiagramms für die ersten beiden Fragestellungen aktiv teilnehmen können, benötigen einige Schüler sicherlich etwas mehr Zeit als andere. Daher werde ich Letzteren anbieten, sich mit vertiefenden kombinatorischen Fragestellungen („Streifenschweine“ und „Streifendromedare“) auseinanderzusetzen.
Diese Phase wird mit der Stellung des Arbeitsauftrages beendet: Ermitteln der möglichen Anzahl an Variationen beider Sorten Streifentiere.
Ggfs. lasse ich den Auftrag bzgl. des besseren Verständnisses von einem Schüler wiederholen.

In der **Erarbeitungsphase** erhalten die Schüler zu Beginn jeweils zu zweit einen Satz 2x4-Knopf-LEGO-Steine. Darin sind jeweils 40 rote, 40 weiße, 20 gelbe und 20 blaue Steine enthalten, mit denen sie die einzelnen Variationen bauen sollen. Des Weitern erhalten sie ein Arbeitsblatt (siehe A1), auf dem sie das jeweilige Baumdiagramm erstellen sollen.

Da das Baumdiagramm zuvor anhand eines einzigen Beispiels als ein mögliches Ordnungsschema lediglich eingeführt worden ist, muss ich davon ausgehen, dass ein Großteil der Schüler die Bedeutung der einzelnen Elemente noch nicht vollständig und sicher verinnerlicht hat und sie somit nicht gleichermaßen in der Lage sind, das jeweils dazugehörige Baumdiagramm zu erstellen. Deshalb habe ich zur Orientierung bei den Aufgaben 1-3 die Zweige der ersten Stufe vorgegeben (Anzahl Farben = Anzahl Entscheidungsmöglichkeiten). Ebenfalls habe ich kenntlich gemacht, welches Element ihre Entscheidungen an diesen Verzweigungsstellen betreffen (hier: Vorderteil des Streifenschafes). Somit kann ich davon ausgehen, dass alle Schüler wenigstens bei dieser Aufgabe zu brauchbaren Ergebnissen gelangen. Bei der Erstellung des Baumdiagramms ab Aufgabe 3 benötigen die Schüler allerdings ihre bisherigen Erkenntnisse und müssen diese abrufen bzw. anwenden, um das entsprechende Baumdiagramm erstellen zu können.

Für die Ermittlung des Ergebnisses werden den Schülern mehrere Angebote vorgelegt: Sie können die LEGO-Steine benutzen, die Bilder ausmalen oder sich mit Hilfe eines Baumdiagramms zu der möglichen Anzahl der Variationen vorarbeiten. Viele werden, aller Wahrscheinlichkeit nach, zunächst mit ihren Steinen drauf los bauen. Dieses Vorgehen kann ihnen u.U. jedoch Schwierigkeiten bereiten, weil sie schnell dabei den Überblick verlieren und einige Tiere doppelt herstellen. Genauso gut kann es aber auch sein, dass einige der leistungsstärkeren Schüler das Material ruhig dem Partner überlassen und sich gleich an das Erstellen des Baumdiagramms machen. Dieses Vorgehen werde ich selbstverständlich nicht unterbinden, auch wenn dann das Baumdiagramm nicht mehr als Kontrolle der enaktiven Erarbeitung dient. In diesem Fall könnte ich ggfs. den Schüler anregen, das Baumdiagramm mit Hilfe der LEGO-Steine zu überprüfen – also nach weiteren Variationen zu suchen. Die Herde mit den auszumalenden Tieren habe ich absichtlich nicht geordnet, damit die Schüler nicht zu einem systematischen Ausmalen verleitet werden, obwohl es dennoch gestattet sein wird, dass die Schüler genau diesen Weg zur Ermittlung der Lösung wählen. Aber gerade die schwächeren Schüler sollen das konkrete Material nutzen können, um mit ihm strategisch zu arbeiten. Der Schüler, der diese Ebene der Repräsentation aber tatsächlich nicht mehr benötigt, darf selbstverständlich das Modellieren mit den LEGO-Steinen umgehen und sich mit Hilfe des Baumdiagramms bzw. des Ausmalens an die Lösungen herantasten.

In dieser Phase werde ich den Schülern zunächst beobachtend und dann beratend zur Seite stehen. Mir ist es wichtig, dass die Schüler in dieser Phase sich nicht nur mit dem Problem der Aufgabenstellung auseinandersetzen, also mit der Ermittlung der Ergebnisse (Anzahl der Variationen), sondern ebenso mit ihrer Vorgehensweise. Damit es dabei aber erst zu einem Problem kommt, muss ich die Schüler jeweils individuell während ihrer Bau- und Konstruktionsphase ein ganz klein wenig „zappeln" lassen, sofern sie keine Ordnung in ihren Suchprozess nach weiteren möglichen Variationen bekommen. Erste dann würde ich mich, in Anlehnung an die Empfehlungen von ZECH (S. 287ff) bzgl. möglicher Lernhilfen, den Schülern zuwenden und ihnen z.B. raten, dass jeder zunächst nur eine der Aufgaben beginnen sollte, dass sie Gegenpaare bauen könnten, sie nach bestimmten Körperteilen sortieren könnten oder ich könnte sie z.B. auf doppelte Tiere aufmerksam machen, sofern sie nicht selber nach derartigen Strategien bereits vorgehen. Hier wird auch der Sinn des Angebots zur Partnerarbeit deutlich: Die Wahrscheinlichkeit ist hierdurch sehr hoch, dass beide zunächst unterschiedlich vorgehen werden. Dies könnte aber beiden aus mehreren Gründen Schwierigkeiten bereiten, so dass sie zwangsläufig bzgl. ihres Vorgehens aneinander geraten und sich miteinander beraten müssen. Probleme könnten z.B. die parallele Bearbeitung derselben Aufgabe sein (dafür sind aber nicht genügend Steine vorhanden) oder das Modellieren doppelter Tiere.

Am Ende dieser Erarbeitungsphase sollten alle Schüler wenigstens eine der ersten beiden Aufgaben gelöst und sich mit der zweiten auseinandergesetzt haben. Das vollständige Modellieren aller möglichen Tiere aus LEGO-Steinen wird bzgl. der beiden ersten Aufgaben erledigt sein. Das Erstellen des entsprechenden Baumdiagramms werden nicht alle Schüler geschafft haben. Ich gehe davon aus, dass die Konzentrationsfähigkeit der Schüler nachgelassen haben wird, und ich sie somit für die **Auswertungsphase** in einen Kinositz mit Blick auf die Tafel bitten werde. Im Fall des Gegenteils werden sie an ihren Tischen sitzen bleiben. Ihre Arbeitsblätter lassen sie im ersten Fall an ihren Tischen liegen.
Zunächst werde ich mich nach ihrer Zusammenarbeit und ihren Ergebnissen erkundigen. Des Weiteren werde ich die Schüler auffordern zu berichten, wie sie bei Ermittlung des Ergebnisses vorgegangen sind. Anschließend werden wir ein Baumdiagramm zur Kontrolle ihrer Ergebnisse gemeinsam an der Tafel erstellen (je nach Zeit, werden wir gemeinsam eine weitere Aufgabe mit Hilfe eines Baumdiagramms kontrollieren). Dazu werden wir das Baumdiagramm oben beginnen und nach unten fortführen, so dass der „Baum“ letztendlich auf dem Kopf steht. Das Baumdiagramm in üblicher Leserichtung, also von links nach rechts, darzustellen, ist insofern günstiger, weil dann die einzelnen Bauteile im Diagramm in ihrer richtigen Reihenfolge zueinander angeordnet sind. Diese Darstellung von oben nach unten ist den Schülern jedoch schon bekannt, weil wir in einer vorangegangenen Stunde gemalte Hasen anschließend an die Zweigspitzen klebten (untereinander hätten sie nicht hingepasst). Ist das Baumdiagramm hergeleitet, malen wir die entsprechenden Variationen an die Zweigspitzen. Dazu beschreibe ich jeweils ein Tier und ein Schüler malt dieses an seinen richtigen Platz. Diese Phase, in der wir die Ergebnisse präsentieren, überprüfen und das Baumdiagramm als Ordnungsschema vertiefen, wird sehr wahrscheinlich stark gelenkt sein. Aber eine gemeinsame Überprüfung der Ergebnisse sehe ich als äußerst wichtig an, weil in dieser Einführung des Schemas grundlegende Elemente erkannt werden müssen, um es bei der Bearbeitung weiterer Aufgaben im Lernen an Stationen verwenden zu können.

Dabei werden dann auch kombinatorische Fragestellungen aus den Bereichen Permutation, Kombination und Variationen ohne Wiederholungen bearbeitet werden müssen.

Sollte noch Zeit vorhanden sein, werde ich die Schüler mit Blick auf das Baumdiagramm der Streifenschafe mit der Frage konfrontieren, wie viele verschiedene Streifenschafe es wohl geben würde, wenn diese nicht nur aus zwei Farben, sondern aus einer weiteren - einer vierten - Farbe bestehen könnten. (Dass diese kombinatorische Fragestellung identisch ist mit der bzgl. der Streifenschweine, wird den Schülern, die diese Zusatzaufgabe bereits bearbeitet haben, zunächst nicht unbedingt ersichtlich sein.). Gemeinsam würden wir dann versuchen, dass Baumdiagramm der Streifenschafe entsprechend zu ergänzen.

7 Literaturliste

BOESE, J. (2000): Der Schatz des Kirotan Ibmok. In: Praxis Grundschule. H. 2, S. 4-11.

BROCKHAUS (Hrsg.) (1993): Der Brockhaus in fünf Bänden. Mannheim; Leipzig: Brockhaus.

LAUTER, J. (1979): Methodik der Grundschulmathematik. Donauwörth: Auer.

LAUTER, J. (1997): Fundament der Grundschulmathematik. Donauwörth: Auer.

LINDENAU, V. / SCHINDLER, M. (1977): Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Primarstufe und Sekundarstufe I. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

MÜLLER, G. / WITTMANN, E. (1977): Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Braunschweig: Vieweg.

MEYERS LEXIKONREDAKTION (Hrsg.) (1993): Meyers neues Lexikon: In 10 Bänden. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: Meyers Lexikonverlag.

DER NIEDERSÄCHSISCHE KULTUSMINISTER (1984): Rahmenrichtlinien für die Grundschule. Mathematik. Hannover: Schroedel.

PANKNIN, M. (1972): Kombination, Wahrscheinlichkeit, und Statistik für die Klassen 1-6. Bochum: Kamp.

Radatz, H./Schipper, W. (1983): Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel.

Schmidt, R. (1978): Topologische Aufgabenstellungen für das erste und zweite Schuljahr. In: EPPING, J. U.A.: Praxis des Mathematikunterrichts. Bd. 7. S. 138-161. Braunschweig: Westermann.

Wittmann, E. (1992): Wider die Flut der bunten Hunde und „der grauen Päckchen“: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In: WITTMANN, E. / MÜLLER, G. : Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. I. Leipzig u.a.: Klett

WITTMANN, E. / MÜLLER, G. N. (1995): Das Zahlenbuch. Mathematik im 2. Schuljahr. (Lehrerband).Leipzig u.a.: Klett.

WITTMANN, E. / MÜLLER, G. N. (1996): Das Zahlenbuch. Mathematik im 3. Schuljahr. (Lehrerband).Leipzig u.a.: Klett.

ZECH, F. (1977): Grundkurs Mathematikdidaktik. Weinheim und Basel: Beltz.

8 Geplanter Unterrichtsverlauf

Zeit	Phase	Unterrichtsschritte	Arbeits- u. Sozialform	Arbeitsmaterialien / Medien
9.45	Einstieg	➢ Begrüßung. ➢ LA erzählt die Geschichte von den Streifentieren. ➢ Bauanleitung der zwei Modelle. ➢ SCH schätzen die mögliche Anzahl der Tiere.	L.gelenktes U.-gespräch im Stuhlkreis	
9.55	Erarbeitung	➢ SCH modellieren mit Hilfe der LEGO-Steine die verschiedenen Variationen der Streifentiere. ➢ LA beobachtet, berät und hilft. ➢ Diff.: Ermitteln der möglichen Variation weiterer Tierarten (Schaf, Schwein, Dromedar).	Partnerarbeit	LEGO-Steine je 2er-Gruppe: 40 rote, 40 weiße, 20 gelbe, 20 blaue
10.05	Ergebnis-Reflexion	➢ LA befragt die SCH nach dem Verlauf der Arbeitsphase – SCH berichten von ihrem Vorgehen. ➢ SCH präsentieren ihre ermittelte Anzahl der verschiedenen Streifenhunden. ➢ LA und SCH erarbeiten gemeinsam das entsprechenden Baumdiagramme an der Tafel. ➢ SCH ordnen die Streifentiere den Zweigspitzen des Baumdiagramms zu.	L.gelenktes U.-gespräch (ggfs. im Kinositz)	
10.10	Vertiefung	➢ SCH bearbeiten weitere Aufgaben.	Einzel-bzw. Partnerarbeit	
10.20	Kontrolle / Sicherung	➢ gemeinsames Kontrollieren einiger Ergebnisse durch das Erstellen von Baumdiagrammen.	L.gelenktes U.-gespräch (ggfs. im Kinositz)	
10.25	Abschluss	➢ SCH räumen ihre Arbeitsmaterialien auf. ➢ Verabschiedung		

9 Anlagen

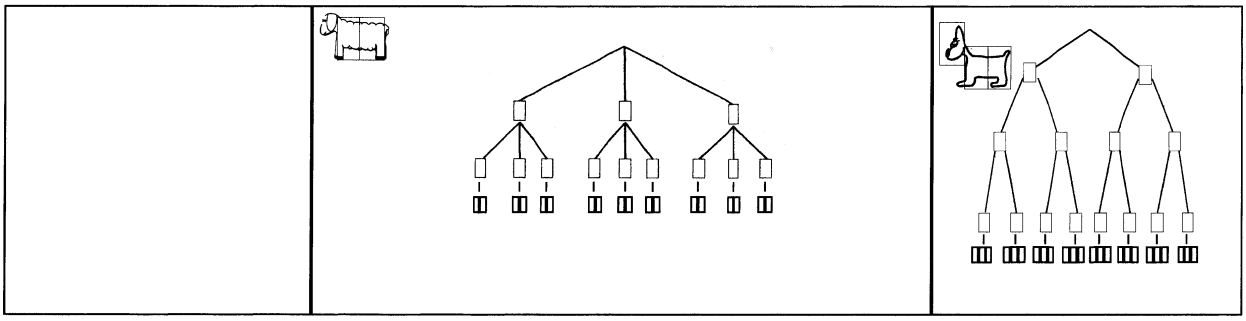
A1 Geplantes Tafelbild

A2 Arbeitsblatt Aufg. 1 und 2

A3 Arbeitsblatt Aufg. 3 und 4

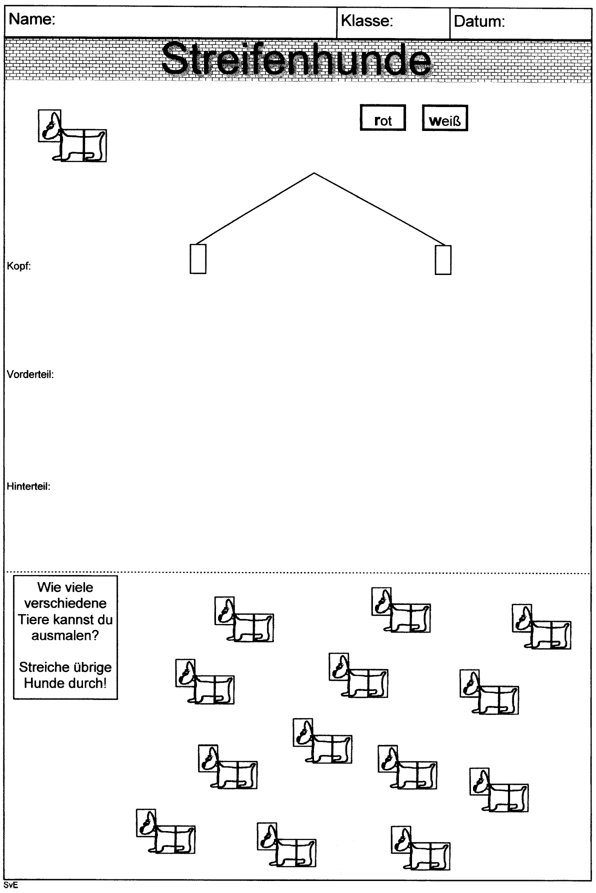
A4 Sitzplan

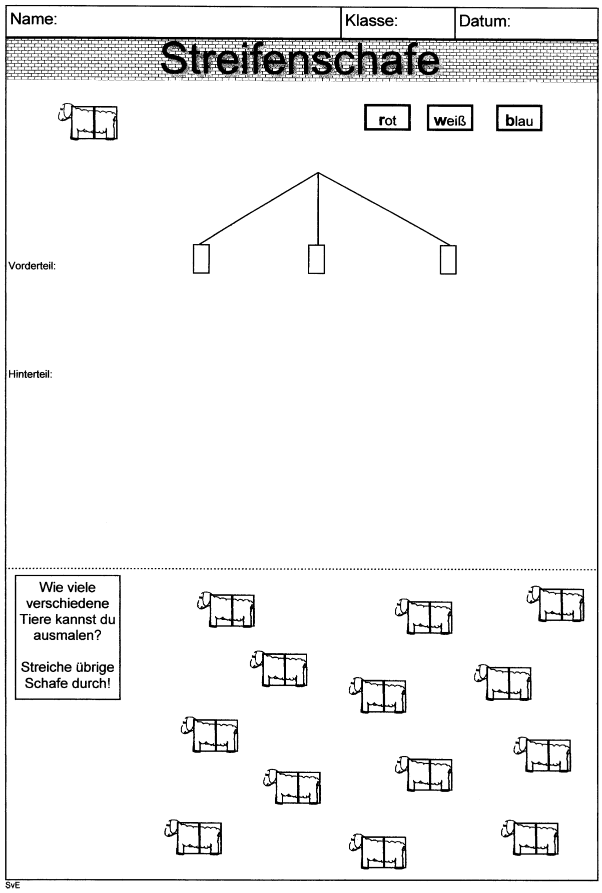
A1 Geplantes Tafelbild



A2 Arbeitsblatt, Aufgaben 1, 2

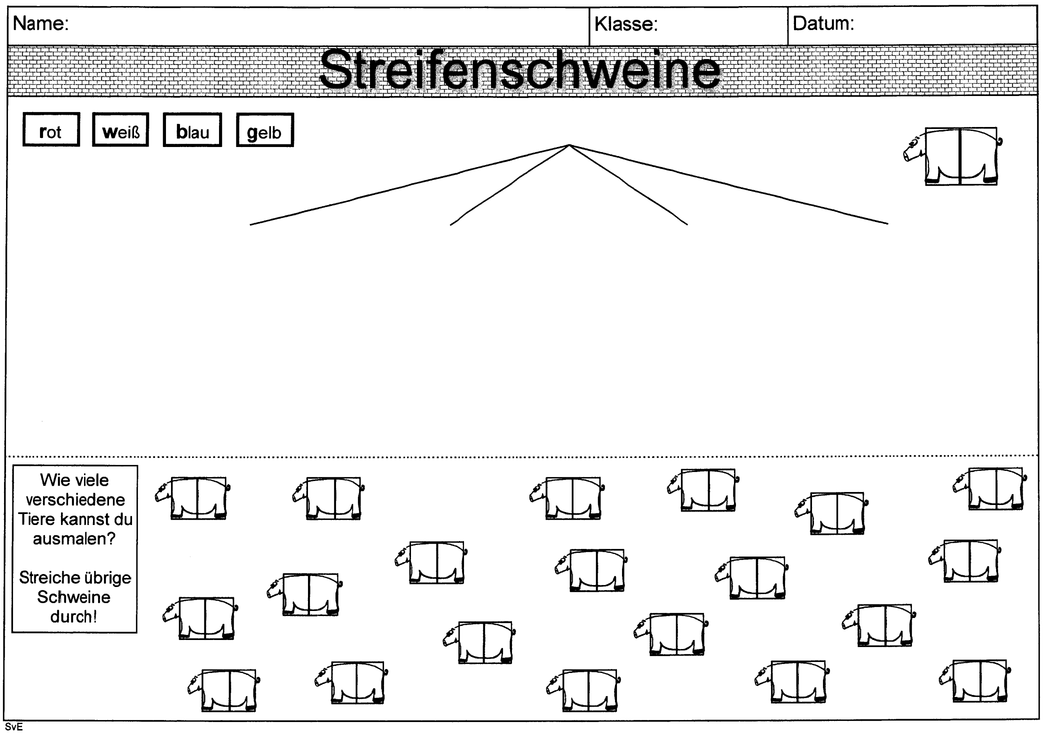
Aufg.: 1 u. 2



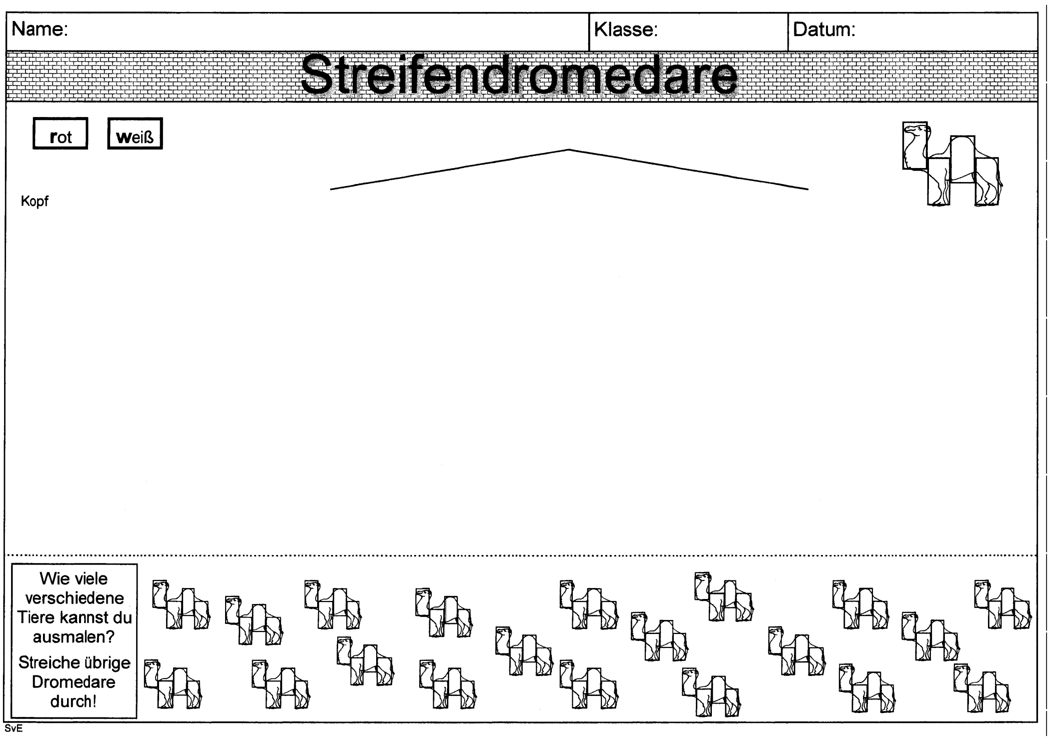


A3 Arbeitsblatt, Zusatzaufgaben 3, 4

Aufg. 3:



Aufg. 4:



<u>Diff</u>.: Leistungsstärkere Schüler erhalten Arbeitsblätter 3 u. 4 ohne die Vorgabe der ersten Zweige.

A4 Sitzplan

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich den Unterrichtsentwurf selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Stellen, die im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt anderen Werken entnommen sind, habe ich mit genauer Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Oldenburg, den 28. Sep. 2001